emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2021

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\mathbb{E}$ l'espérance et $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Problème 1 – Constante d'Euler et partie fractionnaire

Problème 1 – Suites, série de fonctions et loi de $X - \lfloor X \rfloor$

$u_n = H_n - \ln(n+1)$, $v_n = H_n - \ln n$, $S(x) = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$, $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

Corrigé – Problème 1.

Partie A – Étude de deux suites

1. Encadrement et convergence.

a) Pour $s \in [t, t+1]$, $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{s} \leq \frac{1}{t}$; en intégrant sur ce segment de longueur 1, avec $\ln(t+1) - \ln t = \int_t^{t+1} \frac{\mathrm{d}s}{s}$:

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.}$$

b) Avec $t = n+1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) \geq 0$. Avec $t = n$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \leq 0$. Enfin $v_n - u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$. Les suites sont adjacentes :

$$\boxed{(u_n) \nearrow, \quad (v_n) \searrow, \quad u_n \to \gamma,\ v_n \to \gamma.}$$

2. Équivalent de la série harmonique.

Pour $n \geq 2$, $\frac{H_n}{\ln n} = 1 + \frac{v_n}{\ln n}$ et (v_n) est bornée (convergente) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

3. Approximation de γ.

a) (u_n) croît vers γ et (v_n) décroît vers γ, donc $u_n \leq \gamma \leq v_n$. Le milieu $\frac{u_n+v_n}{2}$ et γ appartiennent au segment $[u_n, v_n]$, dont la moitié de la longueur est $\frac{v_n-u_n}{2}$:

$$\boxed{u_n \leq \gamma \leq v_n, \qquad \left|\frac{u_n+v_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).}$$

b) Il suffit que $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n \leq 2 \cdot 10^{-5}$. On calcule H_n au fur et à mesure.

```
def approx_gamma():
    n = 1
    H = 1
    while np.log(n+1) - np.log(n) > 2*10**(-5):
        n = n + 1
        H = H + 1/n
    u = H - np.log(n+1)
    v = H - np.log(n)
    return (u + v)/2
```

`approx_gamma()` renvoie $\frac{u_n+v_n}{2}$, valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

Partie B – Étude d'une fonction définie par une série

4. Convergence.

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)} \in [0, \frac{x}{k^2}]$. Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{k^2}$ (termes positifs) :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \sum_{k\geq 1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\Big) \text{ converge.}}$$

5. Valeurs particulières.

a) $S(0) = 0$; par télescopage, $\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$:

$$\boxed{S(0) = 0, \qquad S(1) = 1.}$$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1} = 2\Big(H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}H_n\Big)$ (on retire de H_{2n+1} le terme 1 et les termes pairs). Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\Big) = 2 - 2(H_{2n+1} - H_n) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}},$$

car $\frac{2}{n+k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{1+k/n}$. La fonction $x \mapsto \frac{2}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$: par le théorème des sommes de Riemann, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x} = 2\ln 2$.

$$\boxed{S\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2 - 2\ln 2.}$$

6. Variations et dérivabilité de S.

a) Les séries convergeant, $S(y) - S(x) = \sum_k \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y}\right) = \sum_k \frac{y-x}{(k+x)(k+y)}$ (série convergente, majorée par $\frac{|y-x|}{k^2}$) :

$$\boxed{S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.}$$

b) Si $y \geq x \geq 0$, la somme est positive, donc $S(y) \geq S(x)$:

$$\boxed{S \text{ est croissante sur } [0, +\infty[.}$$

c) Avec $y = x + h$ et $h \neq 0$: $\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_k \frac{1}{(k+x)^2} = \sum_k \left(\frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \frac{1}{(k+x)^2}\right) = -h \sum_k \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)}$. Comme $k + x \geq k$ et $k + x + h \geq k$,

$$\boxed{\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.}$$

Le majorant tend vers 0 quand $h \to 0$:

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.}$$

7. Relation fonctionnelle et équivalent.

a) $S(x+1) - S(x) = \sum_k \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x}\right)$, dont la somme partielle d'ordre N vaut $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x} \to \frac{1}{x+1}$:

$$\boxed{S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.}$$

b) Par récurrence à partir de $S(0) = 0$: $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

c) Pour $x \geq 2$, $n = \lfloor x \rfloor \geq 2$ vérifie $n \leq x < n+1$; par croissance, $H_n \leq S(x) \leq H_{n+1}$, et $\ln n \leq \ln x < \ln(n+1)$. Donc $\frac{H_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{S(x)}{\ln x} \leq \frac{H_{n+1}}{\ln n}$. Par 2 et $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \to 1$, les deux bornes tendent vers 1 quand $x \to +\infty$:

$$\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x).}$$

8. Intégrale de S.

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k$. En sommant (somme finie), par télescopage :

$$\boxed{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = H_n - \ln(n+1) = u_n.}$$

b) Posons $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = \sum_{k>n} \frac{x}{k(k+x)}$: $0 \leq R_n(x) \leq x \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}$. R_n est continue sur $[0,1]$ (S est dérivable) ; en intégrant cet encadrement sur $[0,1]$ et avec a) :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.}$$

c) Le reste d'une série convergente tend vers 0, et $u_n \to \gamma$:

$$\boxed{\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \gamma.}$$

Partie C – Application en probabilité

9. Une densité.

f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1, et $\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 - \frac{1}{A} \to 1$:

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

10. Loi de X.

a)

$$\boxed{F_X(x) = 0 \text{ si } x < 1, \qquad F_X(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1.}$$

b) $xf(x) = \frac{1}{x} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge :

$$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

11. Loi de Y.

a) Presque sûrement $X \geq 1$. Pour $x \in [0,1[$, $[Y \leq x] = \bigcup_{k\geq 1}[\lfloor X \rfloor = k] \cap [X - k \leq x] = \bigcup_{k\geq 1}[k \leq X \leq k + x]$, réunion d'événements deux à deux incompatibles (car $x < 1$). Par σ-additivité, puis avec F_X continue,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\Big), \qquad \boxed{\mathbb{P}(Y \leq x) = S(x).}$$

b) Y est à valeurs dans $[0,1[$:

$$\boxed{F_Y(x) = 0 \text{ si } x < 0, \qquad F_Y(x) = S(x) \text{ si } 0 \leq x < 1, \qquad F_Y(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.}$$

c) F_Y est continue sur $\mathbb{R}$: en 0, $S(0) = 0$; en 1, S est continue (dérivable) et $S(1) = 1$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et 1 (S' est continue). Y est donc à densité et, en dérivant,

$$\boxed{f_Y(x) = S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \text{ si } 0 < x < 1, \qquad f_Y(x) = 0 \text{ sinon.}}$$

12. Espérance de Y.

f_Y est nulle hors de $[0,1]$, donc Y admet une espérance, $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 xS'(x)\,\mathrm{d}x$. On intègre par parties sur $[0,1]$ avec $u(x) = x$ et $v = S$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $u' = 1$, $v' = S'$:

$$\mathbb{E}(Y) = \big[xS(x)\big]_0^1 - \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = S(1) - \gamma, \qquad \boxed{\mathbb{E}(Y) = 1 - \gamma.}$$

Problème 2 – Un modèle d'urnes et ses polynômes

Problème 2 – L'endomorphisme φ_n et le modèle de Bernoulli–Laplace

$\varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''$, $\Pi_n = \sum_i \binom{n}{i}^2 X^i$, $Z_k =$ nombre de boules rouges dans l'urne rouge.

Corrigé – Problème 2.

Partie A – Étude d'endomorphismes de polynômes

1. Images des monômes.

a) $\varphi_n(1) = X$. Pour $i \geq 1$, avec $\big((2n-1)X+1\big)(X-1) = (2n-1)X^2 - (2n-2)X - 1$ et $X(X-1)^2 = X^3 - 2X^2 + X$:

$$n^2\varphi_n(X^i) = n^2X^{i+1} - i\big((2n-1)X^{i+1} - (2n-2)X^i - X^{i-1}\big)$$

$$+i(i-1)\big(X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1}\big).$$

Les coefficients sont : pour X^{i+1}, $n^2 - 2ni + i + i^2 - i = (n-i)^2$; pour X^i, $2i(n-1) - 2i(i-1) = 2i(n-i)$; pour X^{i-1}, $i + i(i-1) = i^2$.

$$\boxed{\varphi_n(1) = X, \qquad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}.}$$

(La formule reste vraie pour $i = 0$.)

b) φ_n est linéaire (linéarité de la dérivation et de la multiplication par un polynôme fixé). Pour $i \leq n-1$, $\varphi_n(X^i)$ est de degré $\leq i+1 \leq n$, et pour $i = n$ le coefficient de X^{n+1} est nul : $\varphi_n(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$. L'image de la base canonique étant dans $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Le cas $n = 2$.

a) $\varphi_2(1) = X$, $\varphi_2(X) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$, $\varphi_2(X^2) = X$:

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) On vérifie : $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi 0, 1, $-\frac{1}{2}$ sont valeurs propres ; une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a au plus 3 valeurs propres distinctes : $\mathrm{Sp}(A_2) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$. Ayant 3 valeurs propres distinctes, A_2 est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

$$\boxed{E_{-1/2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

c)

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_2) = \Big\{-\frac{1}{2}, 0, 1\Big\}, \quad \text{base propre : } \big((X-1)^2,\ 1-X^2,\ 1+4X+X^2\big).}$$

3. Un vecteur propre explicite.

Avec $P = (X-1)^n$, $P' = n(X-1)^{n-1}$, $P'' = n(n-1)(X-1)^{n-2}$ (terme nul si $n = 1$) :

$$\varphi_n(P) = (X-1)^n\Big(X - \frac{(2n-1)X+1}{n} + \frac{(n-1)X}{n}\Big) = (X-1)^n \cdot \frac{-1}{n}.$$

$$\boxed{\varphi_n\big((X-1)^n\big) = -\frac{1}{n}(X-1)^n, \quad (X-1)^n \neq 0.}$$

4. La valeur propre 1.

a) En évaluant en 1, les deux derniers termes de $\varphi_n(P)$ s'annulent (facteur $X-1$) : $\varphi_n(P)(1) = P(1)$. En particulier :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!], \quad (\varphi_n(X^i))(1) = 1.}$$

b) La colonne d'indice i de A_n contient les coefficients de $\varphi_n(X^i)$, dont la somme est la valeur en 1 :

$$\boxed{\text{chaque colonne de } A_n \text{ a pour somme 1.}}$$

c) Ainsi ${}^tA_n \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$: 1 est valeur propre de ${}^tA_n$. Or ${}^tA_n - I$ et $A_n - I = {}^t({}^tA_n - I)$ sont simultanément inversibles ou non :

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(A_n) = \mathrm{Sp}(\varphi_n).}$$

5. Passage de n à $n+1$.

a) Soit $Q = (X-1)P$: $Q' = P + (X-1)P'$, $Q'' = 2P' + (X-1)P''$. Alors

$$\begin{aligned}(n+1)^2\varphi_{n+1}(Q) =& (n+1)^2X(X-1)P - \big((2n+1)X+1\big)(X-1)\big(P + (X-1)P'\big)\\ &+ X(X-1)^2\big(2P' + (X-1)P''\big).\end{aligned}$$

On factorise $(X-1)$; il reste $\big((n+1)^2 - (2n+1)\big)XP - P + \big(-(2n+1)X - 1 + 2X\big)(X-1)P' + X(X-1)^2P''$, c'est-à-dire $n^2XP - \big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + X(X-1)^2P'' - P = n^2\varphi_n(P) - P$.

$$\boxed{(n+1)^2\varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)\big(n^2\varphi_n(P) - P\big).}$$

b) Si $\varphi_n(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$, alors $\varphi_{n+1}((X-1)P) = \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}(X-1)P$, et $(X-1)P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ est non nul :

$$\boxed{(X-1)P \text{ est vecteur propre de } \varphi_{n+1} \text{ pour la valeur propre } \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}.}$$

6. Spectre de φ_n.

a) Notons $\lambda_{n,j} = \frac{-n+j(j+1)}{n^2}$; comme $j \mapsto j(j+1)$ est strictement croissante, ces $n+1$ réels sont distincts. Pour $n=1$: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres ± 1 (vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$, et au plus 2 valeurs propres), et $\{\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}\} = \{-1, 1\}$. Supposons le résultat au rang n. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, un vecteur propre P_j associé à $\lambda_{n,j}$ fournit par 5.b la valeur propre $\frac{-n+j(j+1)-1}{(n+1)^2} = \lambda_{n+1,j}$ de φ_{n+1} ; par 4.c, $1 = \lambda_{n+1,n+1}$ est aussi valeur propre. Ce sont $n+2$ valeurs propres distinctes de φ_{n+1}, endomorphisme d'un espace de dimension $n+2$: il n'y en a pas d'autre.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \Big\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} \ ; \ j \in [\![0, n]\!] \Big\}.}$$

b) φ_n a $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres distinctes :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.}}$$

7. Le polynôme Π_n.

a) Par 1.a, le coefficient de X^m dans $\varphi_n(\Pi_n)$ est (avec la convention $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$)

$$\binom{n}{m-1}^2 \frac{(n-m+1)^2}{n^2} + \binom{n}{m}^2 \frac{2m(n-m)}{n^2} + \binom{n}{m+1}^2 \frac{(m+1)^2}{n^2}.$$

Or $(n-m+1)\binom{n}{m-1} = m\binom{n}{m}$ et $(m+1)\binom{n}{m+1} = (n-m)\binom{n}{m}$; le coefficient vaut donc $\binom{n}{m}^2 \frac{m^2+2m(n-m)+(n-m)^2}{n^2} = \binom{n}{m}^2$.

$$\boxed{\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n.}$$

b) $\Pi_n \neq 0$ et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1 :

$$\boxed{E_1(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(\Pi_n).}$$

8. Itérées de φ_n ($n \geq 2$).

a) $(R_0, \dots, R_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc libre ; elle a $n+1$ éléments : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum_j \alpha_j R_j$ et, par récurrence, $\varphi_n^k(R_j) = \lambda_j^k R_j$:

$$\boxed{\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j.}$$

b) $\lambda_n = 1$. Pour $j \leq n-1$, $j(j+1) \leq n(n-1)$, donc $-\frac{1}{n} \leq \lambda_j \leq \frac{n^2-2n}{n^2} < 1$; comme $n \geq 2$, $-\frac{1}{n} > -1$ et $|\lambda_j| < 1$, d'où $\lambda_j^k \to 0$. Pour tout réel x, $\varphi_n^k(P)(x) = \sum_j \alpha_j \lambda_j^k R_j(x) \to \alpha_n R_n(x)$, et $R_n \in E_1(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(\Pi_n)$:

$$\boxed{\varphi_n^k(P) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \alpha \Pi_n \text{ pour un réel } \alpha.}$$

Partie B – Étude d'une expérience aléatoire

Si l'urne rouge contient j boules rouges, elle contient $n-j$ boules bleues, et l'urne bleue contient $n-j$ boules rouges et j boules bleues. Une épreuve fait

- diminuer Z de 1 si l'on tire une rouge dans l'urne rouge et une bleue dans l'urne bleue : probabilité $\left(\frac{j}{n}\right)^2$;
- augmenter Z de 1 si l'on tire une bleue dans l'urne rouge et une rouge dans l'urne bleue : probabilité $\left(1-\frac{j}{n}\right)^2$;
- laisser Z inchangé sinon : probabilité $2\frac{j}{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)$.

9. Loi de Z_1.

Au départ ($j=n$), on échange nécessairement une rouge contre une bleue :

$$\boxed{Z_1 = n-1 \text{ (variable certaine).}}$$

10. Relation de récurrence.

Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_k = j])_{0\leq j\leq n}$ (les termes où $\mathbb{P}(Z_k=j)=0$ étant nuls), seuls $j=i-1$, i, $i+1$ contribuent à $[Z_{k+1}=i]$:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{k+1}=i) =& \Big(1-\frac{i-1}{n}\Big)^2\mathbb{P}(Z_k=i-1) + 2\frac{i}{n}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\mathbb{P}(Z_k=i)\\ &+\Big(\frac{i+1}{n}\Big)^2\mathbb{P}(Z_k=i+1),\end{aligned}}$$

avec la convention $\mathbb{P}(Z_k=-1)=\mathbb{P}(Z_k=n+1)=0$.

11. Simulation.

a) `aleaR <= R/n` simule le tirage d'une rouge dans l'urne rouge (qui contient `R` rouges sur n), `aleaB <= R/n` celui d'une bleue dans l'urne bleue (qui contient `R` bleues).

```
def simule(n, k):
    R = n
    for j in range(k):
        aleaR = rd.random()
        aleaB = rd.random()
        if aleaR <= R/n and aleaB <= R/n:
            R = R - 1
        elif aleaR > R/n and aleaB > R/n:
            R = R + 1
    Z = R
    return Z
```

b) Par la loi faible des grands nombres, la moyenne de N simulations indépendantes de Z_k (variable bornée, donc admettant une variance) converge en probabilité vers $\mathbb{E}(Z_k)$ quand $N\to+\infty$: on prend N grand.

```
def esperance(n, k):
    N = 10000
    s = 0
    for m in range(N):
        s = s + simule(n, k)
    return s/N
```

c) Les moyennes se stabilisent vers 15, 10 et 5 pour $n = 30$, 20, 10 :

$$\boxed{\text{On conjecture } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{2}.}$$

12. Espérance de Z_k.

a) D'après la description d'une épreuve :

$$\boxed{\Delta_0(\Omega) = \{-1\}, \qquad \Delta_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\} \ (k \geq 1).}$$

(Pour $k \geq 1$, Z_k prend la valeur $n-1 \in [\![1, n-1]\!]$ avec une probabilité non nulle, à partir de laquelle les trois variations sont possibles.)

b) Formule des probabilités totales avec le système complet $([Z_k = i])_{0\leq i\leq n}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\frac{i}{n}\Big)^2 \mathbb{P}(Z_k = i), \qquad \mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \Big(1 - \frac{i}{n}\Big)^2 \mathbb{P}(Z_k = i).}$$

c) $\mathbb{E}(\Delta_k) = \mathbb{P}(\Delta_k = 1) - \mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \sum_i \Big((1 - \frac{i}{n})^2 - (\frac{i}{n})^2\Big)\mathbb{P}(Z_k = i) = \sum_i (1 - \frac{2i}{n})\mathbb{P}(Z_k = i)$, puis $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \mathbb{E}(Z_k) + \mathbb{E}(\Delta_k)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k), \qquad \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\mathbb{E}(Z_k) + 1.}$$

d) Suite arithmético-géométrique de point fixe $\frac{n}{2}$: $\mathbb{E}(Z_k) - \frac{n}{2} = (1 - \frac{2}{n})^k (n - \frac{n}{2})$. Comme $n \geq 2$, $0 \leq 1 - \frac{2}{n} < 1$:

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{n}{2}.}$$

La conjecture est confirmée : à long terme, chaque urne contient en moyenne autant de boules rouges que de bleues (les boules se mélangent).

13. Les polynômes Q_k.

a) Par 1.a, le coefficient de X^m dans $\varphi_n(Q_k)$ est $\frac{(n-m+1)^2}{n^2}\mathbb{P}(Z_k = m-1) + \frac{2m(n-m)}{n^2}\mathbb{P}(Z_k = m) + \frac{(m+1)^2}{n^2}\mathbb{P}(Z_k = m+1)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z_{k+1} = m)$ par 10 :

$$\boxed{\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}.}$$

b) Par récurrence, $Q_k = \varphi_n^k(Q_0)$ avec $Q_0 = X^n$. La question 8.b ($n \geq 2$) donne :

$$\boxed{Q_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha\Pi_n \text{ pour un réel } \alpha.}$$

14. Loi limite.

a) Par le résultat admis sur les coefficients :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.}$$

b) $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i) = 1$; en passant à la limite (somme finie), $\alpha \sum_i \binom{n}{i}^2 = 1$. La formule admise avec $a = b = m = n$ et $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ donne $\sum_i \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.}$$

c) Soit Z à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que $\mathbb{P}(Z = i) = \binom{n}{i}^2 / \binom{2n}{n}$ (ces nombres sont positifs de somme 1). Pour tout réel x, $\mathbb{P}(Z_k \leq x) = \sum_{i \leq x} \mathbb{P}(Z_k = i)$ est une somme finie qui tend vers $\mathbb{P}(Z \leq x)$: (Z_k) converge en loi vers Z. Comme $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, Z et $n - Z$ ont même loi, donc $\mathbb{E}(Z) = n - \mathbb{E}(Z)$.

$$\boxed{Z_k \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \qquad \mathbb{P}(Z = i) = \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}, \qquad \mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}.}$$