

Année : 2021

École : EML

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Problème 1	1
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries ; intégrales ; variables à densité ; Python</i>	<i>1</i>
Problème 2	4
<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; probabilité discrètes ; convergences de variables ; Python</i>	<i>4</i>

Problème 1

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries ; intégrales ; variables à densité ; Python

Partie A — Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. a. Montrer :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$$

- b. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ .

2. Montrer alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. a. Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \gamma \leq v_n, \quad \text{puis} \quad \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

- b. Écrire une fonction Python d'en-tête `def approx_gamma()` : qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.

Partie B — Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

converge. On pose alors, pour tout x de $[0, +\infty[$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

5. a. Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

- b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. a. Montrer :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

b. En déduire que S est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

c. Montrer :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } x+h \in [0, +\infty[,$$

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

On admet que S' est également continue sur $[0, +\infty[$.

7. a. Montrer :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.$$

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

c. En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0, +\infty[$, montrer :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$$

8. a. Vérifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx,$$

le réel u_n étant défini dans la partie A.

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 S(x) dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

c. Conclure :

$$\int_0^1 S(x) dx = \gamma.$$

Partie C — Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 9.** Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de densité f .

- 10.** **a.** Déterminer la fonction de répartition de X .

- b.** La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire Y par $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

- 11.** **a.** Montrer, pour tout x de $[0, 1[$:

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k+x), \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(Y \leq x) = S(x).$$

- b.** En déduire la fonction de répartition de Y .

- c.** Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y .

- 12.** Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\mathbb{E}(Y) = 1 - \gamma.$$

Problème 2

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; probabilité discrètes ; convergences de variables ; Python

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers T lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$T_k = \sum_{i=0}^n a_{k,i} X^i \quad \text{avec} \quad (a_{k,0}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

et si

$$T = \sum_{i=0}^n b_i X^i \quad \text{avec} \quad (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

alors, pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k,i} = b_i$.

Partie A — Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}.$$

b. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

2. Cas $n = 2$:

a. Vérifier :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que le spectre de A_2 est $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$. Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2 .

c. En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2 .

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(X - 1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\frac{1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (\varphi_n(X^i))(1) = 1.$$

b. En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

c. Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (n+1)^2 \varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)(n^2 \varphi_n(P) - P).$$

b. En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ , alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ .

6. a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\text{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} ; j \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 X^i.$$

a. À l'aide de la question 1.a, montrer :

$$\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n.$$

b. En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre

$$\lambda_j = \frac{-n + j(j+1)}{n^2}.$$

a. Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^n \alpha_j (\lambda_j)^k R_j,$$

où φ_n^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}$.

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$.

Partie B — Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher.

Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue. On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k -ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

9. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 .

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbb{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1).$$

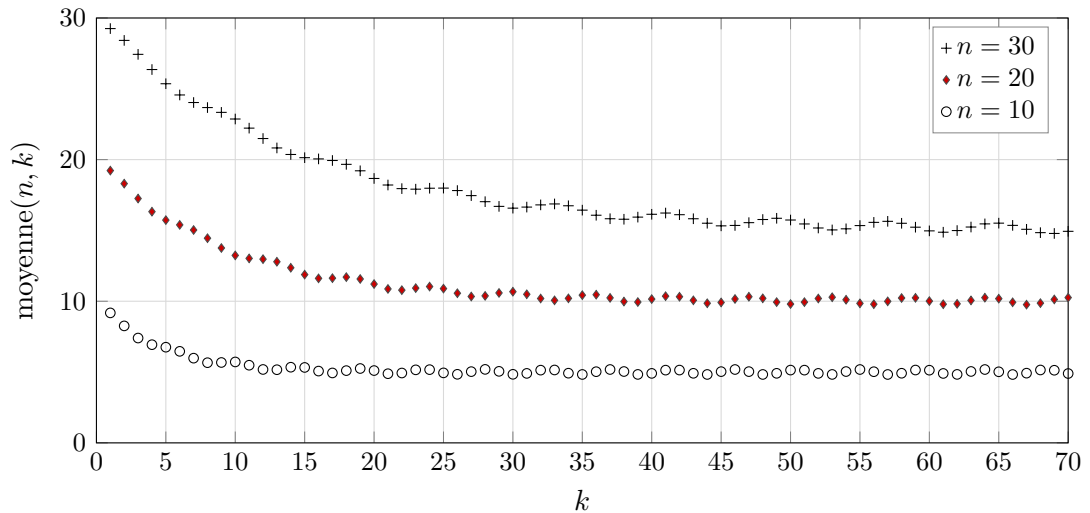
11. a. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k .

```

1 from random import random
2
3 def simule(n, k):
4     R = n # nombre de boules rouges dans l'urne rouge
5     for j in range(k):
6         aleaR = random()
7         aleaB = random()
8         if aleaR <= R / n and aleaB <= R / n:
9             R = .....
10        elif .....:
11            R = R + 1
12    Z = .....
13    return Z
14
```

b. Écrire une fonction Python d'en-tête **def esperance(n, k):** qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k . On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

c. On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n . On obtient le graphe ci-dessous.



Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k.$$

a. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

b. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i)$$

et

$$\mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i).$$

c. Montrer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k), \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(Z_k) + 1.$$

d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, une expression de $\mathbb{E}(Z_k)$ en fonction de k et de n . Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

13. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$Q_k = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Z_k = i) X^i.$$

a. À l'aide de la question 1.a, démontrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1},$$

où φ_n est l'endomorphisme étudié dans la partie A.

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question 7.

14. a. Dédurre de la question précédente :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.$$

b. On admet la formule suivante :

$$\forall (a, b, m) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^m \binom{a}{i} \binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$

Montrer :

$$\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

c. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.