

HEC Paris – ESCP Business School

Mathématiques II – Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2021

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. On note $\mathbb{E}$, $\mathbb{V}$ et Cov l'espérance, la variance et la covariance, et $x^{\underline{r}} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$.

Partie I – Polynômes factoriels

Partie I – Bases (U_k) et (V_k) de F_r , nombres $\sigma(r, k)$ et $s(r, k)$

$U_k : x \mapsto x^{\underline{k}}$, $V_k : x \mapsto x^{\underline{k}}$, $U_r = \sum_k \sigma(r, k) V_k$ et $V_r = \sum_k s(r, k) U_k$.

Corrigé – Partie I.

1. Familles de polynômes de degrés échelonnés.

- a) Supposons les λ_k non tous nuls et soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors $\lambda_m Q_m = -\sum_{k < m} \lambda_k Q_k$. Le membre de gauche est de degré d_m ; celui de droite est de degré au plus $d_{m-1} < d_m$ (ou est nul si $m = 0$, alors que $\lambda_0 Q_0 \neq 0$) : c'est absurde.

$(Q_0, \dots, Q_r)$ est une famille libre.

- b) La famille est libre et compte $r+1 = \dim F_r$ éléments : c'est une base de F_r si et seulement si tous les Q_k appartiennent à F_r , c'est-à-dire $d_r \leq r$. Comme $0 \leq d_0 < d_1 < \dots < d_r$ sont des entiers, $d_k \geq k$ pour tout k , et $d_r \leq r$ équivaut à $d_k = k$ pour tout k .

$(Q_0, \dots, Q_r)$ base de $F_r \iff \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \deg Q_k = k$.

C'est une condition nécessaire et suffisante.

2. Les polynômes V_r .

- a) $V_0 = 1$ n'a pas de racine ; pour $r \geq 1$, $V_r(x) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k)$:

les racines de V_r ($r \geq 1$) sont $0, 1, \dots, r-1$.

- b) V_k est un produit de k facteurs de degré 1 : $\deg V_k = k$. Par 1.b :

$(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r .

- c) Pour $r = 2$, $x^{\underline{2}} = x^2 - x = x^2 - \frac{2-1}{2}x$. Si la formule est vraie au rang $r \geq 2$, alors

$$x^{\underline{r+1}} = x^{\underline{r}}(x-r) = \left(x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1})\right)(x-r)$$

$$= x^{r+1} - \left(r + \frac{r(r-1)}{2}\right)x^r + o(x^r),$$

car rx^{r-1} , $x \cdot o(x^{r-1})$ et $ro(x^{r-1})$ sont des $o(x^r)$. Or $r + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(r+1)r}{2}$.

$$\boxed{x^r \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1}).}$$

Comme $x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1}$ est un polynôme de degré au plus $r-2$ (il est de degré $\leq r-1$ et négligeable devant x^{r-1}), le coefficient de x^{r-1} dans V_r vaut exactement $-\frac{r(r-1)}{2}$ (y compris pour $r=1$).

3. Les nombres $\sigma(r, k)$.

a) $U_r \in F_r$ et $(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r :

$$\boxed{\exists! (\sigma(r, k))_{0 \leq k \leq r}, \quad U_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k.}$$

b) On évalue $U_r = \sum_k \sigma(r, k) V_k$ en des entiers, en utilisant $V_k(j) = 0$ pour $0 \leq j < k$.

- En $x = 0$: $0 = 0^r = \sigma(r, 0)$.
- En $x = 1$: $1 = \sigma(r, 0) + \sigma(r, 1)V_1(1) = \sigma(r, 1)$.
- En $x = 2$ (pour $r \geq 2$) : $2^r = \sigma(r, 1) \cdot 2 + \sigma(r, 2) \cdot 2$, donc $\sigma(r, 2) = 2^{r-1} - 1$.
- Coefficient de x^r : seul V_r (unitaire de degré r) y contribue, donc $\sigma(r, r) = 1$.
- Coefficient de x^{r-1} : seuls V_r et V_{r-1} y contribuent, d'où $0 = -\frac{r(r-1)}{2} + \sigma(r, r-1)$ (2.c).

$$\boxed{\sigma(r, 0) = 0, \quad \sigma(r, 1) = \sigma(r, r) = 1, \quad \sigma(r, r-1) = \frac{r(r-1)}{2},}$$

$$\boxed{\sigma(r, 2) = 2^{r-1} - 1 \quad (r \geq 2).}$$

c) Comme $V_{k+1} = V_k(x - k)$, on a $xV_k = V_{k+1} + kV_k$. Ainsi

$$U_{r+1} = xU_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k)(V_{k+1} + kV_k) = \sum_{k=1}^{r+1} \sigma(r, k-1)V_k + \sum_{k=0}^r k\sigma(r, k)V_k.$$

Par unicité de la décomposition dans la base $(V_0, \dots, V_{r+1})$:

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\sigma(r, k).}$$

d) Par récurrence sur r : $\sigma(1, 1) = 1$. Si les $\sigma(r, k)$, $1 \leq k \leq r$, sont des entiers ≥ 1 , alors pour $1 \leq k \leq r$, $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\sigma(r, k)$ est un entier $\geq k \geq 1$ (car $\sigma(r, k-1) \in \mathbb{N}$, nul si $k=1$), et $\sigma(r+1, r+1) = 1$.

$$\boxed{\forall r \geq 1, \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*.}$$

e) On remplit un tableau avec la relation de c), à partir de $\sigma(1, 1) = 1$ (les autres cases valent 0).

```

S = np.zeros((7,7))
S[1,1] = 1
for r in range(1,5):
    for k in range(1,r+2):
        S[r+1,k] = S[r,k-1] + k*S[r,k]
for r in range(2,6):
    print(S[r,1:r+1])

```

$[1, 1], \quad [1, 3, 1], \quad [1, 7, 6, 1], \quad [1, 15, 25, 10, 1].$

4. Les nombres $s(r, k)$.

a) $V_r \in F_r$ et $(U_0, \dots, U_r)$ est une base de F_r :

$\exists! (s(r, k))_{0 \leq k \leq r}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r = \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k.$

b) $V_{r+1} = (x - r)V_r = \sum_{k=0}^r s(r, k)(U_{k+1} - rU_k)$. En identifiant le coefficient de U_k pour $1 \leq k \leq r$:

$s(r+1, k) = s(r, k-1) - r s(r, k).$

Pour $r \geq 1$, $s(r, 0) = V_r(0) = 0$, donc $s(r+1, 1) = -r s(r, 1)$; avec $s(1, 1) = 1$, on obtient

$s(r, 1) = (-1)^{r-1} (r-1)!.$

c) Montrons par récurrence sur r que $(-1)^{r+k} s(r, k) > 0$ pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Pour $r = 1$: $s(1, 1) = 1$. Si c'est vrai au rang r , pour $1 \leq k \leq r$,

$$(-1)^{r+1+k} s(r+1, k) = (-1)^{r+(k-1)} s(r, k-1) + r (-1)^{r+k} s(r, k),$$

somme d'un terme positif ou nul (nul si $k = 1$) et d'un terme strictement positif ;
 enfin $s(r+1, r+1) = 1 > 0$ (V_{r+1} est unitaire).

$s(r, k) \text{ est du signe de } (-1)^{r+k}.$

d) En substituant : $U_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) \sum_{\ell=0}^k s(k, \ell) U_\ell = \sum_{\ell=0}^r \left(\sum_{k=\ell}^r \sigma(r, k) s(k, \ell) \right) U_\ell$. Par unicité des coordonnées dans la base canonique :

$\sigma(r, r) s(r, r) = 1, \quad \forall \ell \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=\ell}^r \sigma(r, k) s(k, \ell) = 0.$

e) $s(r, r) = \frac{1}{\sigma(r, r)} = 1$, et $s(r, r-1)$ est le coefficient de x^{r-1} dans V_r (2.c) :

$s(r, r) = 1, \quad s(r, r-1) = -\frac{r(r-1)}{2}.$

Partie II – Quelques propriétés de la loi de Poisson

Partie II – Moments factoriels d'une variable de Poisson

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta), \quad X^r = X(X-1)\cdots(X-r+1), \quad f(\theta, k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \quad g = \ln f.$$

Corrigé – Partie II.

5. Premiers moments.

a)

$$\mathbb{E}(X) = \theta, \quad \mathbb{V}(X) = \theta, \quad \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \theta + \theta^2.$$

b) D'après 3.e (valeurs des $\sigma(r, k)$) et $\sigma(r, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} X &= X^1, & X^2 &= X^1 + X^2, \\ X^3 &= X^1 + 3X^2 + X^3, & X^4 &= X^1 + 7X^2 + 6X^3 + X^4. \end{aligned}$$

c) Soit $k \geq 1$. La variable X^k est positive (nulle si $X < k$) et la série $\sum_j j^k \mathbb{P}(X = j)$ est à termes positifs, avec

$$\sum_{j=k}^{+\infty} j^k \frac{\theta^j}{j!} e^{-\theta} = \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\theta^j}{(j-k)!} e^{-\theta} = \theta^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \theta^k.$$

Par le théorème de transfert, X^k admet une espérance, égale à θ^k . Comme $X^r = \sum_{k=1}^r \sigma(r, k) X^k$, X^r admet une espérance par linéarité.

$$X \text{ admet des moments de tous ordres.}$$

6. Moments factoriels.

a) Pour $m \geq 1$, $(X^r)^m$ est une fonction polynomiale de X ; elle admet une espérance par 5.c et linéarité.

$$X^r \text{ admet des moments de tous ordres.}$$

b) Le calcul de 5.c donne :

$$\mathbb{E}(X^r) = \theta^r.$$

c) Avec 5.b et 6.b :

$$\mathbb{E}(X^3) = \theta + 3\theta^2 + \theta^3, \quad \mathbb{E}(X^4) = \theta + 7\theta^2 + 6\theta^3 + \theta^4.$$

7. Une minoration de variance.

a) $g(\theta, k) = k \ln \theta - \theta - \ln(k!)$, donc

$$\partial_1 g(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - 1, \quad \partial_1 g(\theta, X) = \frac{X}{\theta} - 1.$$

b) $X \cdot X^r = X^r((X - r) + r) = X^{r+1} + rX^r$. D'où, avec 6.b,

$$\text{Cov}(X, X^r) = \mathbb{E}(XX^r) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^r) = \theta^{r+1} + r\theta^r - \theta \cdot \theta^r, \quad \boxed{\text{Cov}(X, X^r) = r\theta^r.}$$

c) Par bilinéarité, $\text{Cov}(\partial_1 g(\theta, X), X^r) = \frac{1}{\theta} \text{Cov}(X, X^r) = r\theta^{r-1}$, et $\mathbb{V}(\partial_1 g(\theta, X)) = \frac{\mathbb{V}(X)}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\text{Cov}(A, B)^2 \leq \mathbb{V}(A)\mathbb{V}(B)$ donne $r^2\theta^{2r-2} \leq \frac{1}{\theta}\mathbb{V}(X^r)$:

$$\boxed{\text{Cov}(\partial_1 g(\theta, X), X^r) = r\theta^{r-1}, \quad \mathbb{V}(X^r) \geq r^2\theta^{2r-1}.}$$

Partie III – Estimation ponctuelle de fonctions de θ

Partie III – Score, information de Fisher et inégalité de Cramér–Rao

$F(\theta, k_1, \dots, k_n) = \prod_i f(\theta, k_i)$, $G = \ln F$, $Z_\theta = \partial_1 G(\theta, X_1, \dots, X_n)$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Corrigé – Partie III.

8. Score.

- a) Avec $s = k_1 + \dots + k_n$, $F(\theta, k_1, \dots, k_n) = \frac{\theta^s e^{-n\theta}}{k_1! \dots k_n!}$ et $G = s \ln \theta - n\theta - \sum_i \ln(k_i!)$ sont dérivables en θ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\partial_1 G(\theta, k_1, \dots, k_n) = \frac{s}{\theta} - n, \quad \partial_1 F = \left(\frac{s}{\theta} - n\right) F = \partial_1 G \cdot F.$$

- b) $Z_\theta = \frac{S_n}{\theta} - n$, où $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta)$ (stabilité de la loi de Poisson par somme de variables indépendantes). Donc $\mathbb{E}(Z_\theta) = \frac{n\theta}{\theta} - n = 0$ et $\mathbb{V}(Z_\theta) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\theta^2} = \frac{n\theta}{\theta^2}$:

$$\mathbb{E}(Z_\theta) = 0, \quad I(\theta) = \mathbb{V}(Z_\theta) = \frac{n}{\theta} > 0.$$

9. Estimateurs réguliers.

- a) (R_1) dit exactement que $\mathbb{E}(T) = \varphi(\theta)$:

$$T \text{ est un estimateur sans biais de } \varphi(\theta).$$

- b) (R_1) s'écrit $\varphi(\theta) = \sum t(k_1, \dots, k_n) F(\theta, k_1, \dots, k_n)$ pour tout θ ; (R_3) revient à dériver cette somme d'une série terme à terme. Or dériver terme à terme une somme infinie n'est pas licite en général (c'est une interversion de limites).

$$(R_3) \text{ demande de dériver terme à terme la somme de } (R_1).$$

10. Inégalité de Cramér–Rao.

- a) Par (R_3) et 8.a, $\varphi'(\theta) = \sum t(k) \partial_1 G(\theta, k) F(\theta, k)$, série absolument convergente. Par la formule de transfert appliquée à $u_\theta(k) = t(k) \partial_1 G(\theta, k)$, c'est $\mathbb{E}(t(X_1, \dots, X_n) \partial_1 G(\theta, X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(TZ_\theta)$. Enfin $\mathbb{E}(Z_\theta) = 0$ donne $\text{Cov}(T, Z_\theta) = \mathbb{E}(TZ_\theta)$.

$$\varphi'(\theta) = \mathbb{E}(TZ_\theta) = \text{Cov}(T, Z_\theta).$$

- b) Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\varphi'(\theta)^2 = \text{Cov}(T, Z_\theta)^2 \leq \mathbb{V}(T) \mathbb{V}(Z_\theta) = \mathbb{V}(T) I(\theta)$, et $I(\theta) > 0$:

$$\mathbb{V}(T) \geq \frac{(\varphi'(\theta))^2}{I(\theta)}.$$

11. Simulation de Z_θ .

- a) X est un tableau à n lignes et N colonnes de réalisations indépendantes de $\mathcal{P}(\theta)$: chaque colonne est une réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$. Il faut sommer chaque colonne, ce qui donne N réalisations de S_n , puis calculer $\frac{S_n - n\theta}{\theta} = Z_\theta$.

def z_th(n, theta):

 X = rd.poisson(theta, (n,N))

 ech = (np.sum(X, axis=0) - n*theta)/theta

 return ech

Le blanc est `axis=0`.

- b) Z_θ est centrée, de variance $\frac{n}{\theta}$: 2,5 pour (10, 4), 5 pour (20, 4), et 10 pour (40, 4) comme pour (50, 5). Plus la variance est faible, plus l'histogramme est concentré et haut : C correspond à (10, 4) et B à (20, 4) ; A et D, plus étalés et de même allure, correspondent à (40, 4) et (50, 5). Pour les départager, on remarque que $Z_\theta = \frac{S_n - n\theta}{\theta}$ prend ses valeurs dans une grille de pas $\frac{1}{\theta}$. Les classes de l'histogramme étant de largeur $\frac{1}{2}$, pour $\theta = 4$ (pas 0,25) chaque classe contient le même nombre de valeurs possibles et l'histogramme est régulier ; pour $\theta = 5$ (pas 0,2), les classes contiennent alternativement 2 ou 3 valeurs possibles, d'où l'histogramme irrégulier en dents de scie de la figure D.

A $\leftrightarrow$ (40, 4), B $\leftrightarrow$ (20, 4), C $\leftrightarrow$ (10, 4), D $\leftrightarrow$ (50, 5).

12. Estimation de θ^r .

- a) Par stabilité de la loi de Poisson par somme de variables indépendantes :

$$S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta), \quad \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = n\theta.$$

- b) $M_{r,n} = \frac{S_n^r}{n^r} = t(X_1, \dots, X_n)$ avec $t(k) = \frac{(k_1 + \dots + k_n)^r}{n^r}$, indépendante de θ .

- (R_1) : par 6.b appliquée à $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta)$, $\mathbb{E}(M_{r,n}) = \frac{(n\theta)^r}{n^r} = \theta^r$.
- (R_2) : par 6.a, S_n^r admet un moment d'ordre 2.
- (R_3) : la série étant admise absolument convergente, et $\partial_1 F = (\frac{s}{\theta} - n)F$, la formule de transfert donne

$$\sum t(k) \partial_1 F(\theta, k) = \mathbb{E}\left(M_{r,n} \left(\frac{S_n}{\theta} - n\right)\right) = \frac{1}{\theta n^r} \mathbb{E}(S_n S_n^r) - n\theta^r.$$

Par 7.b et 6.b pour $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta)$, $\mathbb{E}(S_n S_n^r) = (n\theta)^{r+1} + r(n\theta)^r$, d'où $\sum t(k) \partial_1 F(\theta, k) = n\theta^r + r\theta^{r-1} - n\theta^r = r\theta^{r-1} = \varphi'(\theta)$.

Avec 10.b et $I(\theta) = \frac{n}{\theta}$:

$$M_{r,n} \text{ est un estimateur régulier de } \theta^r, \quad \mathbb{V}(M_{r,n}) \geq \frac{(r\theta^{r-1})^2}{n/\theta} = \frac{r^2 \theta^{2r-1}}{n}.$$

- c) Notons $\mu = n\theta$. On vérifie l'identité polynomiale $(x^2)^2 = x^4 + 4x^3 + 2x^2$ (les deux membres sont de degré 4, unitaires et coïncident en 0, 1, 2, 3, 4 : 0, 0, 4, 36, 144). Par 6.b, $\mathbb{E}((S_n^2)^2) = \mu^4 + 4\mu^3 + 2\mu^2$, donc $\mathbb{V}(S_n^2) = 4\mu^3 + 2\mu^2$ et

$$\mathbb{V}(M_{2,n}) = \frac{4n^3\theta^3 + 2n^2\theta^2}{n^4} = \frac{4\theta^3}{n} + \frac{2\theta^2}{n^2}.$$

$M_{2,n}$ est sans biais et $\mathbb{V}(M_{2,n}) \rightarrow 0$; par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
 $\mathbb{P}(|M_{2,n} - \theta^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(M_{2,n})}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$:

$(M_{2,n})_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ^2 .

d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_n^k = \sum_{j=1}^k \sigma(k, j) S_n^j$, donc $\mathbb{E}(S_n^k) = \sum_{j=1}^k \sigma(k, j) (n\theta)^j$, polynôme en n de degré k , de coefficient dominant $\sigma(k, k)\theta^k = \theta^k$:

$$\mathbb{E}(S_n^k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n\theta)^k.$$

Par 4.a, $(S_n^r)^2 = \sum_{j=0}^{2r} c_j S_n^j$ avec $c_{2r} = 1$ (des coefficients ne dépendant que de r).
Ainsi

$$\mathbb{E}(M_{r,n}^2) = \frac{1}{n^{2r}} \left(\mathbb{E}(S_n^{2r}) + \sum_{j < 2r} c_j \mathbb{E}(S_n^j) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta^{2r},$$

car $\frac{\mathbb{E}(S_n^{2r})}{n^{2r}} \rightarrow \theta^{2r}$ et, pour $j < 2r$, $\frac{\mathbb{E}(S_n^j)}{n^{2r}} \sim \frac{\theta^j}{n^{2r-j}} \rightarrow 0$. Donc $\mathbb{V}(M_{r,n}) = \mathbb{E}(M_{r,n}^2) - \theta^{2r} \rightarrow 0$ et, comme en c), par Bienaymé-Tchebychev :

pour tout $r \geq 1$, $(M_{r,n})_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ^r .

Partie IV – Le cas $\varphi(\theta) = \theta$

Partie IV – Efficacité de la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i, W_n = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2, W'_n = \frac{n-1}{n} W_n.$$

Corrigé – Partie IV.

13. La moyenne empirique.

- a) $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = M_{1,n}$: d'après 12.b avec $r = 1$,

$$\bar{X}_n \text{ est un estimateur régulier de } \theta.$$

- b) L'inégalité devient $\mathbb{V}(T) \geq \frac{\theta}{n}$ pour tout estimateur régulier T de θ . Or $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{\theta}{n}$:

$$\mathbb{V}(T) \geq \frac{\theta}{n} = \mathbb{V}(\bar{X}_n) : \text{ la borne est atteinte par } \bar{X}_n.$$

14. Unicité de l'estimateur efficace.

- a) $\psi(\alpha) = (1 - \alpha)\bar{X}_n + \alpha Y = t_\alpha(X_1, \dots, X_n)$ avec $t_\alpha = (1 - \alpha)t_0 + \alpha t_Y$ (où $t_0(k) = \frac{k_1 + \dots + k_n}{n}$ et $Y = t_Y(X_1, \dots, X_n)$), indépendante de θ . $\mathbb{E}(\psi(\alpha)) = (1 - \alpha)\theta + \alpha\theta = \theta$; $\psi(\alpha)$ admet une variance (combinaison linéaire de variables admettant un moment d'ordre 2) ; et, par linéarité des sommes de séries absolument convergentes, $\sum t_\alpha \partial_1 F = (1 - \alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot 1 = 1 = \varphi'(\theta)$.

$$\psi(\alpha) \text{ est un estimateur régulier de } \theta.$$

- b) Posons $D = Y - \bar{X}_n$ et $h(\alpha) = \mathbb{V}(\psi(\alpha)) = \mathbb{V}(\bar{X}_n) + 2\alpha \text{Cov}(\bar{X}_n, D) + \alpha^2 \mathbb{V}(D)$. D'après a) et 13.b, $h(\alpha) \geq \frac{\theta}{n} = h(0)$ pour tout α : la fonction polynomiale h admet un minimum en 0, donc $h'(0) = 2 \text{Cov}(\bar{X}_n, D) = 0$. Ainsi $\text{Cov}(\bar{X}_n, Y) = \mathbb{V}(\bar{X}_n)$:

$$\text{Cov}(\bar{X}_n, Y) = \frac{\theta}{n}.$$

- c) Par bilinéarité, $\mathbb{V}(Y - \bar{X}_n) = \mathbb{V}(Y) - 2 \text{Cov}(\bar{X}_n, Y) + \mathbb{V}(\bar{X}_n)$:

$$\mathbb{V}(Y - \bar{X}_n) = \mathbb{V}(Y) - \mathbb{V}(\bar{X}_n).$$

D'après 13.b, $\bar{X}_n$ est efficace. Si Y est aussi efficace, $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(\bar{X}_n)$, donc $\mathbb{V}(Y - \bar{X}_n) = 0$ avec $\mathbb{E}(Y - \bar{X}_n) = 0$; par Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|Y - \bar{X}_n| \geq \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et par le théorème de la limite monotone $\mathbb{P}(Y \neq \bar{X}_n) = \lim_k \mathbb{P}(|Y - \bar{X}_n| \geq \frac{1}{k}) = 0$.

$$\text{Un estimateur efficace de } \theta \text{ est presque sûrement égal à } \bar{X}_n.$$

15. La variance empirique.

- a) En développant, $\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 = \sum_i X_i^2 - 2\bar{X}_n \sum_i X_i + n\bar{X}_n^2 = \sum_i X_i^2 - n\bar{X}_n^2$:

$$W_n = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}_n^2 \right).$$

- b) $\mathbb{E}(\sum X_i^2) = n(\theta + \theta^2)$ et $\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \mathbb{V}(\overline{X}_n) + \theta^2 = \frac{\theta}{n} + \theta^2$, donc $\mathbb{E}(W_n) = \frac{n\theta + n\theta^2 - \theta - n\theta^2}{n-1} = \theta$:

W_n est un estimateur sans biais de θ .

- c) W_n^2 est une fonction polynomiale de degré 4 des X_i : c'est une combinaison linéaire de produits $X_i X_j X_k X_l$, qui admettent une espérance (produits de puissances de variables indépendantes admettant des moments de tous ordres).

W_n admet une variance.

- d) *Résultat admis en indication.* Soit $\varepsilon > 0$ et $c = |a| + 1$. Pour n assez grand, $|a_n| \leq c$ et $|a_n - a||y - z| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors $|a_n(Y_n - Z_n) - a(y - z)| \leq c|Y_n - y| + c|Z_n - z| + |a_n - a||y - z|$, donc $\mathbb{P}(|a_n(Y_n - Z_n) - a(y - z)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|Y_n - y| \geq \frac{\varepsilon}{3c}) + \mathbb{P}(|Z_n - z| \geq \frac{\varepsilon}{3c}) \rightarrow 0$.

Cas de $\overline{X}_n$. Sans biais, de variance $\frac{\theta}{n} \rightarrow 0$: par Bienaymé-Tchebychev, $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$.

Cas de W_n . Les X_i^2 sont indépendantes, de même loi, admettent une variance (moment d'ordre 4 de X) et ont pour espérance $\theta + \theta^2$: par la loi faible des grands nombres, $Y_n = \frac{1}{n} \sum X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta + \theta^2$. Par composition par la fonction continue $x \mapsto x^2$, $Z_n = \overline{X}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta^2$. Enfin $W_n = a_n(Y_n - Z_n)$ avec $a_n = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1$; l'indication donne $W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$.

$(\overline{X}_n)_{n \geq 1}$ et $(W_n)_{n \geq 2}$ sont deux suites convergentes d'estimateurs de θ .

16. Identification des histogrammes.

Les trois histogrammes sont centrés autour de 3 : la valeur du paramètre est $\theta \simeq 3$.

- $\overline{X}_n$ est l'estimateur efficace : sa variance $\frac{\theta}{n} \simeq \frac{3}{50} = 0,06$ (écart type $\simeq 0,25$) est la plus petite. C'est la figure G, de loin la plus concentrée.
- W_n est sans biais : son histogramme est centré en $\theta = 3$ (figure E).
- $W'_n = \frac{n-1}{n} W_n$ a pour espérance $\frac{49}{50} \theta \simeq 2,94$: il est biaisé et son histogramme est légèrement décalé vers la gauche, et un peu plus resserré (figure F).

$E \leftrightarrow W_n, \quad F \leftrightarrow W'_n, \quad G \leftrightarrow \overline{X}_n.$