

Ecricome

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2022

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Racines de polynômes et reste de Taylor

On fixe $a > 1$ et on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k/k!$. Pour $n \geq 1$, on étudie la solution positive u_n de $f_n(x) = a$. Les restes sont définis par $R_n(x) = \int_0^x e^t(x-t)^n/n! dt$.

Corrigé – Exercice 1 – Racines de polynômes et reste de Taylor.

1. Calcul de f_n .

a) Pour $k \geq 1$, l'identité $k! = k(k-1)!$ donne

$$t_k(x) = \frac{x}{k} t_{k-1}(x).$$

Elle vaut aussi pour $x = 0$.

b) On initialise le terme et la somme à 1, puis on calcule successivement chaque terme à partir du précédent.

```
def f(n, x):
    t = 1
    s = 1
    for k in range(1, n + 1):
        t = t*x/k
        s = s+t
    return s
```

Après le passage d'indice k , on a $t = t_k(x)$ et $s = f_k(x)$ en arithmétique exacte. La valeur renvoyée est donc

$$f(n, x) = f_n(x).$$

Pour $n = 0$, la boucle est vide et le résultat vaut bien 1.

2. Existence et unicité de u_n .

Pour $n \geq 1$, la fonction f_n est polynomiale, donc continue et dérivable. Sur $\mathbb{R}_+$,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}(x) \geq 1.$$

Elle est donc strictement croissante. De plus $f_n(0) = 1 < a$ et, pour $x \geq 0$, $f_n(x) \geq 1+x$, donc $f_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution, et la stricte croissance assure son unicité. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad \exists! u_n \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(u_n) = a, \quad u_n > 0.$$

En particulier, $u_1 = a - 1$.

3. Monotonie et premières limites.

a) Pour $x \geq 0$ fixé,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

La suite est donc croissante, strictement si $x > 0$. Déterminons sa limite à partir d'une formule de Taylor *finie*. Pour $x > 0$, l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[0, x]$. La formule de Taylor–Lagrange à l'ordre n fournit $\xi_{n,x} \in]0, x[$ tel que

$$e^x = f_n(x) + e^{\xi_{n,x}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi

$$0 < e^x - f_n(x) \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour justifier que le dernier facteur tend vers 0, posons $b_n = x^{n+1}/(n+1)!$. Choisissons un entier N tel que $N+2 \geq 2x$. Pour $n \geq N$,

$$b_{n+1} = \frac{x}{n+2} b_n \leq \frac{1}{2} b_n.$$

Une récurrence donne $0 \leq b_n \leq b_N 2^{-(n-N)}$ pour $n \geq N$. Le majorant géométrique tend vers 0, donc $b_n \rightarrow 0$. Le cas $x = 0$ est immédiat : $f_n(0) = 1 = e^0$. On obtient

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad (f_n(x))_n \text{ est croissante et } f_n(x) \longrightarrow e^x.}$$

b) Comme $u_n > 0$,

$$f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} > a = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

La stricte croissance de f_{n+1} donne donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} < u_n.}$$

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. De plus $u_n \leq u_1 = a - 1$, d'où

$$\boxed{0 < u_n \leq a - 1, \quad u_n \longrightarrow \ell \in [0, a - 1].}$$

4. Identification de la limite.

a) La formule de Taylor–Lagrange utilisée à la question 3 donne $f_n(x) \leq e^x$ pour $x \geq 0$. En prenant $x = u_n$, on obtient $a \leq e^{u_n}$. La croissance du logarithme entraîne

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \ln a \leq u_n.}$$

b) Si $K \geq 0$ minore la suite, alors $K \leq u_n$. La croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$ donne $f_n(K) \leq f_n(u_n) = a$. En faisant tendre n vers $+\infty$, la question 3 donne

$$\boxed{e^K \leq a.}$$

- c) La limite ℓ de la suite décroissante est elle-même un minorant positif ou nul ; par b), $e^\ell \leq a$, donc $\ell \leq \ln a$. En passant à la limite dans a), on a aussi $\ell \geq \ln a$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln a.$$

5. Majoration du reste intégral.

- a) Une suite convergente est bornée ; ici la question 3 donne même $0 < u_n \leq a - 1$. On peut donc choisir $M = a - 1 > 0$, ou tout autre majorant positif. Ainsi

$$\exists M > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad |u_n| \leq M.$$

- b) Sur le segment $[0, u_n]$, on a $e^t \leq e^M$ et $(u_n - t)^n \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(u_n) &\leq \frac{e^M}{n!} \int_0^{u_n} (u_n - t)^n dt \\ &= e^M \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- c) Posons $q_n = n^2 M^{n+1} / (n+1)!$ pour $n \geq 1$. Les termes sont positifs et

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{M}{n+2} \leq \frac{4M}{n+2}.$$

Choisissons $N \geq 1$ tel que $N+2 \geq 8M$. Pour tout $n \geq N$, $q_{n+1} \leq q_n/2$, et par récurrence

$$0 \leq q_n \leq q_N 2^{-(n-N)} \rightarrow 0.$$

L'inégalité de b) donne alors $0 \leq n^2 |R_n(u_n)| \leq e^M q_n \rightarrow 0$. Pour deux suites avec $s_n \neq 0$, la notation $r_n = o(s_n)$ signifie $r_n/s_n \rightarrow 0$. On a donc établi

$$R_n(u_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. Lien entre l'exponentielle et les polynômes.

- a) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \neq 0$, les fonctions

$$U(t) = e^t, \quad V(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment ayant pour extrémités 0 et x , avec

$$U'(t) = e^t, \quad V'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Une intégration par parties sur ce segment, avec les bornes orientées de 0 vers x , donne

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left[-e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

L'égalité vaut aussi pour $x = 0$, où tous ses termes sont nuls. Par ailleurs $R_0(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$. En appliquant la relation précédente aux indices $0, \dots, n-1$, on obtient, pour $n \geq 1$,

$$R_0(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

D'où $e^x = f_n(x) + R_n(x)$. Pour $n = 0$, c'est l'expression de R_0 . Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = f_n(x) + R_n(x).}$$

- b)** En évaluant cette égalité en u_n , $e^{u_n} = a + R_n(u_n)$. Comme $R_n(u_n) \geq 0$, on peut écrire

$$u_n - \ln a = \ln \left(1 + \frac{R_n(u_n)}{a} \right).$$

Pour $r \geq 0$, l'égalité $\ln(1+r) = \int_0^r (1+t)^{-1} dt$ donne $0 \leq \ln(1+r) \leq r$. Il en résulte

$$0 \leq n^2(u_n - \ln a) \leq \frac{n^2 R_n(u_n)}{a} \longrightarrow 0$$

par la question 5. Ainsi

$$\boxed{u_n = \ln a + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

7. Équivalent de $u_n - \ln a$.

- a)** L'identité de la question 6 à l'indice $n+1$ donne $e^x = f_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$. Comme $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}/(n+1)!$,

$$\boxed{e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.}$$

Cette identité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- b)** Posons $t_n = u_n^{n+1}/(n+1)! > 0$. L'identité de a) donne $e^{u_n} = a + t_n + R_{n+1}(u_n)$. En reprenant la majoration intégrale de la question 5,

$$0 \leq R_{n+1}(u_n) \leq e^M \frac{u_n^{n+2}}{(n+2)!}.$$

On divise par $t_n > 0$:

$$0 \leq \frac{R_{n+1}(u_n)}{t_n} \leq e^M \frac{u_n}{n+2} \leq \frac{e^M M}{n+2} \longrightarrow 0.$$

Cela prouve exactement

$$\boxed{e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).}$$

- c)** Posons $L = \ln a > 0$ et $\delta_n = u_n - L \geq 0$. La question 6 donne $n^2 \delta_n \rightarrow 0$. Avec l'inégalité logarithmique de la question 6,

$$0 \leq (n+1) \ln \left(\frac{u_n}{L} \right) = (n+1) \ln \left(1 + \frac{\delta_n}{L} \right) \leq \frac{n+1}{L} \delta_n \longrightarrow 0.$$

En effet, $(n+1)\delta_n = ((n+1)/n^2)(n^2\delta_n) \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\left(\frac{u_n}{L}\right)^{n+1} \rightarrow 1.$$

Ce quotient est précisément celui des deux termes comparés :

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour le réel fixé $L > 0$, la domination géométrique démontrée à la question 3 donne $L^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$. L'équivalent précédent entraîne donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

- d)** Pour $u_n > 0$, l'intégrande définissant $R_n(u_n)$ est strictement positif à l'intérieur du segment $[0, u_n]$. On a donc $R_n(u_n) > 0$, d'où $e^{u_n} > a$ et $\delta_n > 0$. La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne

$$\frac{e^{\delta_n} - 1}{\delta_n} \rightarrow 1.$$

D'autre part, b) assure $(e^{u_n} - a)/t_n \rightarrow 1$, et c) assure $t_n/(L^{n+1}/(n+1)!) \rightarrow 1$. En réunissant les trois quotients,

$$\frac{u_n - L}{L^{n+1}/(a(n+1)!)} = \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1} \frac{e^{u_n} - a}{t_n} \frac{t_n}{L^{n+1}/(n+1)!} \rightarrow 1.$$

Ainsi

$$u_n - \ln a \sim \frac{(\ln a)^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Exercice 2 – Sous-espaces stables et projections

Pour l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, on construit deux projecteurs, puis deux endomorphismes qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre nilpotent.

Corrigé – Exercice 2 – Sous-espaces stables et projections.**1. Sous-espaces propres et défaut de diagonalisabilité.**

a) Pour déterminer $\text{Ker}(f + \text{Id})$, on résout

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les équations $x + y - z = 0$, $3y = 0$ et $x + 4y - z = 0$ donnent $y = 0$ et $z = x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f + \text{Id}) &= \text{Vect}(1, 0, 1), \\ \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) &= 1. \end{aligned}$$

Pour déterminer $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$, on résout

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

La première équation donne $y = 2x + z$. En la substituant dans la troisième, on obtient $x + 4(2x + z) - 4z = 9x = 0$. Donc $x = 0$ et $y = z$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - 2\text{Id}) &= \text{Vect}(0, 1, 1), \\ \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id}) &= 1. \end{aligned}$$

Ces deux noyaux contiennent un vecteur non nul, donc

$$-1 \text{ et } 2 \text{ sont des valeurs propres de } f.$$

b) Supposons f diagonalisable. Une base de diagonalisation comporte trois vecteurs propres. Comme -1 et 2 sont des valeurs propres, elles apparaissent parmi les trois coefficients diagonaux de la matrice dans cette base. En les plaçant en premières positions, cette matrice est de la forme $\text{diag}(-1, 2, \lambda)$. La trace est indépendante de la base et $\text{tr}(A) = 0 + 2 - 2 = 0$. Donc

$$-1 + 2 + \lambda = 0, \quad \lambda = -1.$$

Deux vecteurs distincts de la base de diagonalisation seraient ainsi associés à la valeur propre -1 . Ils sont indépendants, ce qui imposerait $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) \geq 2$, contrairement à a). Ainsi

$$f \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

2. Noyau de $(f + \text{Id})^2$.

Si $x \in \text{Ker}(f + \text{Id})$, alors $(f + \text{Id})^2(x) = (f + \text{Id})(0) = 0$. On a donc l'inclusion demandée. Le calcul matriciel donne

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son noyau est l'ensemble des vecteurs de deuxième coordonnée nulle :

$$\begin{aligned} \text{Ker}((f + \text{Id})^2) &= \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Ce noyau est de dimension 2, tandis que celui de $f + \text{Id}$ est de dimension 1. En particulier, le vecteur $(1, 0, 0)$ appartient au premier mais pas au second, puisque $(f + \text{Id})(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \neq 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(f + \text{Id}) \subsetneq \text{Ker}((f + \text{Id})^2).$$

3. Décomposition en somme directe.

Avec les notations de l'énoncé, $F = \text{Vect}(0, 1, 1)$ et $G = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Si $t(0, 1, 1)$ appartient à G , sa deuxième coordonnée impose $t = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. En outre, tout vecteur (x, y, z) s'écrit

$$(x, y, z) = y(0, 1, 1) + (x, 0, z - y),$$

avec un premier terme dans F et un second dans G . Ainsi

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

Une base adaptée à cette décomposition est

$$\mathcal{C} = ((0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

4. Stabilité des deux facteurs.

Si $v \in F$, alors $f(v) = 2v \in F$. Si $v = (x, 0, z) \in G$, le produit par A donne

$$f(v) = (-z, 0, x - 2z),$$

qui appartient encore à G puisque sa deuxième coordonnée est nulle. Donc

$$f(F) \subset F, \quad f(G) \subset G.$$

5. Polynôme annulateur.

Les endomorphismes $f + \text{Id}$ et $f - 2\text{Id}$ commutent : en développant leur composée dans chaque ordre, on trouve $f^2 - f - 2\text{Id}$. Sur F , le facteur $f - 2\text{Id}$ est nul ; sur G , le facteur $(f + \text{Id})^2$ est nul. On peut donc calculer $P(f)$ sur F dans le premier ordre et sur G dans l'ordre inverse : il est nul sur les deux sous-espaces. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que $P(f)$ est linéaire, il est nul sur tout l'espace. Ainsi

$$P(f) = (f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) = 0.$$

Le développement $P(X) = X^3 - 3X - 2$ donne également

$$f^3 - 3f - 2\text{Id} = 0.$$

6. Commutation des deux endomorphismes π_1 et π_2 .

Ce sont des polynômes en f :

$$\pi_1 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{Id}), \quad \pi_2 = -\frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{Id}).$$

Les puissances de f commutent, puisque $f^i \circ f^j = f^{i+j} = f^j \circ f^i$. Par développement et distributivité, toutes les combinaisons polynomiales de ces puissances commutent donc entre elles. En particulier,

$$\boxed{\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1.}$$

7. Produit des deux endomorphismes.

a) Les facteurs polynomiaux commutent, donc

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \pi_1 &= -\frac{1}{81}(f + 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})^2 \\ &= -\frac{1}{81}(f + 4\text{Id}) \circ P(f) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\pi_2 \circ \pi_1 = 0.}$$

b) Si $y \in \text{Im } \pi_1$, il existe x tel que $y = \pi_1(x)$. Alors $\pi_2(y) = (\pi_2 \circ \pi_1)(x) = 0$, donc

$$\boxed{\text{Im } \pi_1 \subset \text{Ker } \pi_2.}$$

8. Somme des deux endomorphismes.

a) En utilisant les expressions développées de la question 6,

$$\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{Id} - f^2 - 2f + 8\text{Id}) = \text{Id}.$$

Ainsi $\boxed{\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}.}$

b) Si $x \in \text{Ker } \pi_2$, alors $x = (\pi_1 + \pi_2)(x) = \pi_1(x)$. Le vecteur x appartient donc à l'image de π_1 , et

$$\boxed{\text{Ker } \pi_2 \subset \text{Im } \pi_1.}$$

9. Égalité des images et des noyaux.

Les questions 7 b) et 8 b) donnent les deux inclusions opposées, donc

$$\boxed{\text{Ker } \pi_2 = \text{Im } \pi_1.}$$

Pour l'autre égalité, la commutation et la question 7 donnent $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$, donc $\text{Im } \pi_2 \subset \text{Ker } \pi_1$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker } \pi_1$, alors $x = (\pi_1 + \pi_2)(x) = \pi_2(x)$, donc $x \in \text{Im } \pi_2$. Ainsi

$$\boxed{\text{Ker } \pi_1 = \text{Im } \pi_2.}$$

10. Les deux endomorphismes sont des projecteurs.

En composant $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$ à gauche par π_1 ,

$$\pi_1 = \pi_1 \circ (\pi_1 + \pi_2) = \pi_1^2 + \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1^2.$$

De même,

$$\pi_2 = \pi_2 \circ (\pi_1 + \pi_2) = \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2^2 = \pi_2^2.$$

Ainsi

$$\pi_1^2 = \pi_1, \quad \pi_2^2 = \pi_2, \quad \pi_1, \pi_2 \text{ sont des projecteurs.}$$

11. Identification des deux projecteurs.

Pour $v \in F$, on a $f(v) = 2v$, donc $\pi_1(v) = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2(v) = v$. Pour $w \in G$, la définition de G donne $\pi_1(w) = 0$. Ainsi, pour la décomposition unique $x = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$,

$$\pi_1(x) = v, \quad \pi_2(x) = x - \pi_1(x) = w.$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{l} \pi_1 \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G, \\ \pi_2 \text{ est le projecteur sur } G \text{ parallèlement à } F. \end{array}$$

Dans le cas présent, la décomposition de la question 3 donne les formules explicites

$$\pi_1(x, y, z) = (0, y, y), \quad \pi_2(x, y, z) = (x, 0, z - y).$$

Corrigé – Exercice 2 – Deux endomorphismes qui commutent.

On pose $g = 2\pi_1 - \pi_2$ et $h = f - g$.

12. Expressions polynomiales de g et h .

Avec les expressions de π_1 et π_2 de la question 6,

$$\begin{aligned} g &= \frac{2}{9}(f^2 + 2f + \text{Id}) + \frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{Id}) \\ &= \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}f - \frac{2}{3}\text{Id}. \end{aligned}$$

En soustrayant cette expression de f , on obtient

$$\begin{array}{l} g = \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}f - \frac{2}{3}\text{Id}, \\ h = -\frac{1}{3}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{2}{3}\text{Id}. \end{array}$$

Les deux endomorphismes sont donc des polynômes de f .

13. Base de diagonalisation de g .

La question 11 montre que π_1 agit comme l'identité sur F et s'annule sur G , tandis que π_2 s'annule sur F et agit comme l'identité sur G . Ainsi

$$g(v) = 2v \quad (v \in F), \quad g(w) = -w \quad (w \in G).$$

La base $\mathcal{C}$ construite à la question 3 contient un premier vecteur dans F et les deux suivants dans G . On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

 g est diagonalisable.

14. Carré de h .

Puisque $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$,

$$\begin{aligned} h &= f \circ (\pi_1 + \pi_2) - (2\pi_1 - \pi_2) \\ &= (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2. \end{aligned}$$

Ainsi

$h = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2.$

Le premier terme est nul car $\text{Im } \pi_1 = F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$; donc $h = (f + \text{Id}) \circ \pi_2$.
L'endomorphisme π_2 , qui est un polynôme de f , commute avec $f + \text{Id}$ et vérifie $\pi_2^2 = \pi_2$.
Par conséquent,

$$h^2 = (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2^2 = (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2 = 0,$$

puisque $\text{Im } \pi_2 = G = \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$. Ainsi

$h^2 = 0, \quad h \text{ est nilpotent.}$

15. Conclusion.

On a $f = g + h$ par définition. La question 13 montre que g est diagonalisable et la question 14 que h est nilpotent. Enfin, d'après la question 12, les deux endomorphismes sont des polynômes de f . Les puissances de f commutent entre elles ; en développant les deux produits, on obtient donc $g \circ h = h \circ g$. Finalement,

$$\begin{aligned} f &= g + h, & g \circ h &= h \circ g, \\ g &\text{ diagonalisable,} & h &\text{ nilpotent et } h^2 = 0. \end{aligned}$$

Problème – I. Loi de Gumbel et propriétés élémentaires

Étudier la fonction $F_{\mu,a}$, définir la loi par sa densité et simuler par inversion de la fonction de répartition. Les espérances et la densité d'une différence se calculent ensuite par des changements de variable dans des intégrales convergentes.

Corrigé – Problème – I. Loi de Gumbel et propriétés élémentaires.

Dans toute cette partie, $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et

$$F_{\mu,a}(x) = \exp \left(-\exp \left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right).$$

1. Étude de $F_{\mu,a}$.

- a) Les fonctions exponentielles et les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et leur composition conserve cette propriété. Ainsi $F_{\mu,a}$ est notamment de classe $\mathcal{C}^2$. Posons $t(x) = e^{(\mu-x)/a}$, qui est strictement positif et vérifie $t'(x) = -t(x)/a$. On a $F_{\mu,a}(x) = e^{-t(x)}$, donc

$$f_{\mu,a}(x) = -t'(x)e^{-t(x)} = \frac{t(x)}{a}e^{-t(x)}.$$

En dérivant ce produit,

$$f'_{\mu,a}(x) = \frac{t'(x)}{a}(1 - t(x))e^{-t(x)} = \frac{t(x)(t(x) - 1)}{a^2}e^{-t(x)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_{\mu,a}(x) &= \frac{1}{a}e^{(\mu-x)/a} \exp \left(-e^{(\mu-x)/a} \right), \\ f'_{\mu,a}(x) &= \frac{1}{a^2}e^{(\mu-x)/a} \left(e^{(\mu-x)/a} - 1 \right) \exp \left(-e^{(\mu-x)/a} \right). \end{aligned}$$

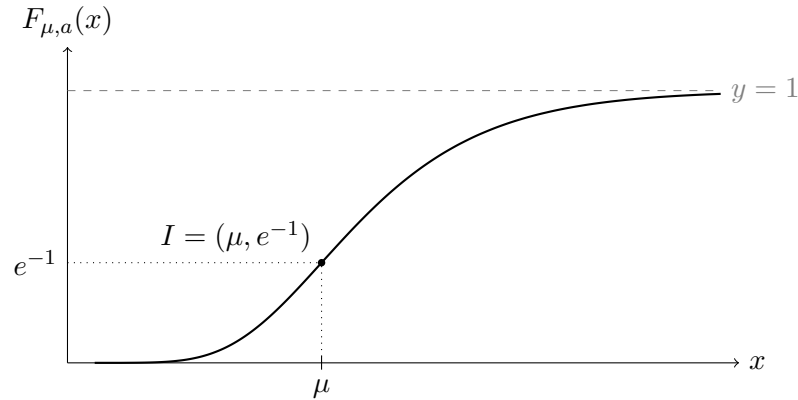
- b) Puisque $a > 0$ et $t(x) > 0$, on a $f_{\mu,a}(x) > 0$ pour tout x . La fonction $F_{\mu,a}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $t(x) \rightarrow +\infty$, donc $F_{\mu,a}(x) \rightarrow 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $t(x) \rightarrow 0$, donc $F_{\mu,a}(x) \rightarrow 1$. Le signe de $f'_{\mu,a}(x)$ est celui de $t(x) - 1$, qui est positif pour $x < \mu$, nul pour $x = \mu$ et négatif pour $x > \mu$. Ainsi $F_{\mu,a}$ est convexe sur $] -\infty, \mu]$ et concave sur $[\mu, +\infty[$. La dérivée seconde change de signe en μ , et $F_{\mu,a}(\mu) = e^{-1}$:

$$I = (\mu, e^{-1}) \text{ est l'unique point d'inflexion.}$$

Les droites $y = 0$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales, respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	μ	$+\infty$
$F'_{\mu,a}(x)$	+	$1/(ae)$	+
$F''_{\mu,a}(x)$	+	0	-
$F_{\mu,a}(x)$	0	$\nearrow e^{-1}$	$\nearrow 1$

L'allure suivante est tracée avec des abscisses exprimées relativement à μ et à l'échelle a .



- c) La fonction $F_{\mu,a}$ est continue, strictement croissante, et ses limites aux bornes sont 0 et 1. Le théorème de la bijection donne donc

$$F_{\mu,a} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[\text{ est une bijection.}$$

Dans le cas $(\mu, a) = (0, 1)$, pour $u \in]0, 1[$,

$$u = e^{-e^{-x}} \iff -\ln u = e^{-x} \iff x = -\ln(-\ln u).$$

Ces logarithmes sont définis car $u > 0$ et $-\ln u > 0$. Ainsi

$$G_{0,1}(u) = -\ln(-\ln u) \quad (0 < u < 1).$$

2. Densité et fonction de répartition.

La fonction $f_{\mu,a}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A < B$, puisque $F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$,

$$\int_A^B f_{\mu,a}(x) \, dx = F_{\mu,a}(B) - F_{\mu,a}(A).$$

Les limites de la question 1 montrent que l'intégrale impropre sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Les trois conditions d'une densité sont donc satisfaites. De plus, pour tout réel x ,

$$\int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) \, dt = F_{\mu,a}(x) - 0.$$

Ainsi

$$\begin{array}{l} f_{\mu,a} \text{ est une densité,} \\ F_{\mu,a} \text{ est sa fonction de répartition.} \end{array}$$

On appelle loi de Gumbel de paramètre (μ, a) la loi ainsi définie par la densité $f_{\mu,a}$; on la note $\mathcal{G}(\mu, a)$.

3. Transformation affine d'une variable standard.

Soit $Z \sim \mathcal{G}(0, 1)$ et $X = aZ + \mu$. Comme $a > 0$, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{a}\right) \\ &= F_{0,1}\left(\frac{x - \mu}{a}\right) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right) = F_{\mu,a}(x). \end{aligned}$$

Cette fonction de répartition est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $f_{\mu,a}$. Ainsi X est une variable à densité et

$$aZ + \mu \sim \mathcal{G}(\mu, a).$$

4. Simulation par inversion.

- a) La variable U appartient à $]0, 1[$ avec probabilité 1, donc $Y = G_{0,1}(U)$ est bien définie. La réciproque d'une fonction strictement croissante est strictement croissante. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(G_{0,1}(U) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x),\end{aligned}$$

car $F_{0,1}(x) \in]0, 1[$ et U est uniforme sur cet intervalle. Ainsi

$$-\ln(-\ln U) \sim \mathcal{G}(0, 1).$$

- b) On tire u dans $]0, 1[$, puis on applique l'inverse de la répartition et la transformation affine de la question 3. Le tirage est repris s'il se trouve à une extrémité, afin que les logarithmes soient définis.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def gumbel(mu, a):
    u = rd.random()
    while u <= 0 or u >= 1:
        u = rd.random()
    return mu - a * np.log(-np.log(u))
```

La fonction s'utilise pour $a > 0$; les questions 3 et 4 a) justifient la loi de la valeur renvoyée.

$$\text{gumbel}(\mu, a) \text{ simule la loi } \mathcal{G}(\mu, a).$$

5. Existence et calcul de l'espérance.

- a) Montrons la convergence absolue de l'intégrale. Sur $]0, 1]$, $|\ln u|e^{-u} \leq -\ln u$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\int_{\varepsilon}^1 -\ln u \, du = [u - u \ln u]_{\varepsilon}^1 = 1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon \longrightarrow 1,$$

car $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ par croissances comparées. La comparaison prouve donc la convergence de l'intégrale de $|\ln u|e^{-u}$ près de 0. Sur $[1, +\infty[$, $0 \leq \ln u \leq u$, donc $|\ln u|e^{-u} \leq ue^{-u}$. Vérifions la convergence de cette dernière intégrale : sur $[1, R]$, les fonctions $v(u) = u$ et $w(u) = -e^{-u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $v'(u) = 1$ et $w'(u) = e^{-u}$. L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\int_1^R ue^{-u} \, du = [-ue^{-u}]_1^R + \int_1^R e^{-u} \, du = \frac{2}{e} - (R+1)e^{-R}.$$

Le dernier terme tend vers 0 par croissances comparées, donc cette intégrale converge vers $2/e$. Par comparaison, la seconde partie de l'intégrale absolue converge également. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\ln u|e^{-u} \, du &< +\infty, \\ \int_0^{+\infty} \ln u e^{-u} \, du &\text{ converge.}\end{aligned}$$

- b) Le changement de variable $t = e^{-u}$ est donné par une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, strictement décroissante, de dérivée $-e^{-u}$. Son inverse est $u = -\ln t$ et $dt = -e^{-u} du$. Pour $0 < \varepsilon < R$, il donne sur les segments correspondants

$$\int_{\varepsilon}^R \ln u e^{-u} du = \int_{e^{-R}}^{e^{-\varepsilon}} \ln(-\ln t) dt.$$

La même identité vaut en remplaçant les logarithmes par leurs valeurs absolues. Les bornes transformées tendent vers 0 et 1 lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Le changement de variable conserve donc la nature des intégrales aux deux bornes. Par a), l'intégrale transformée converge absolument, et

$$\boxed{\int_0^1 \ln(-\ln t) dt = \int_0^{+\infty} \ln u e^{-u} du.}$$

On pose, comme dans l'énoncé,

$$\gamma = - \int_0^1 \ln(-\ln t) dt.$$

- c) La variable $Z = (X - \mu)/a$ suit la loi $\mathcal{G}(0, 1)$, de densité $f_{0,1}$. Le changement de variable

$$t = F_{0,1}(x) = e^{-e^{-x}}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, de dérivée $f_{0,1}(x) > 0$. Son inverse est $x = -\ln(-\ln t)$ et $dt = f_{0,1}(x) dx$. Pour $A < B$, sur les segments correspondants,

$$\int_A^B |x| f_{0,1}(x) dx = \int_{F_{0,1}(A)}^{F_{0,1}(B)} |\ln(-\ln t)| dt.$$

Le changement de variable conserve la nature des intégrales impropres : les bornes de droite tendent vers 0 et 1 lorsque celles de gauche tendent vers $-\infty$ et $+\infty$. L'intégrale absolue de droite converge par b), donc celle de gauche converge. Ainsi Z admet une espérance. Le même changement de variable sans valeurs absolues donne

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x) dx = - \int_0^1 \ln(-\ln t) dt = \gamma.$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \gamma.}$

- d) Puisque $X = aZ + \mu$, on a $|X| \leq a|Z| + |\mu|$. L'espérance de $|Z|$ est finie, donc celle de $|X|$ l'est également. La linéarité de l'espérance donne

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(Z) + \mu = \mu + a\gamma.}$$

6. Densité de la différence de deux variables indépendantes.

- a) La variable Z est à densité, donc $\mathbb{P}(Z = -t) = 0$ pour tout réel t . La fonction de répartition de $-Z$ est alors

$$\mathbb{P}(-Z \leq t) = \mathbb{P}(Z \geq -t) = 1 - F_{0,1}(-t).$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée vaut $f_{0,1}(-t)$. Une densité de $-Z$ est donc

$$\boxed{g(t) = f_{0,1}(-t) = e^t e^{-e^t} \quad (t \in \mathbb{R}).}$$

- b) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $b = 1 + e^{-x} > 0$. Sur $[0, R]$, les fonctions $v(u) = u$ et $w(u) = -e^{-bu}/b$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $v'(u) = 1$ et $w'(u) = e^{-bu}$. Une intégration par parties sur ce segment donne

$$\int_0^R u e^{-bu} \, du = [-u e^{-bu}/b]_0^R + \frac{1}{b} \int_0^R e^{-bu} \, du = -\frac{R e^{-bR}}{b} + \frac{1 - e^{-bR}}{b^2}.$$

Les termes $R e^{-bR}$ et e^{-bR} tendent vers 0. L'intégrale impropre converge donc, et

$$\int_0^{+\infty} u e^{-(1+e^{-x})u} \, du = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}.$$

- c) Pour tous réels x, t , un calcul direct donne

$$f_{0,1}(x-t)g(t) = e^{-x+2t} \exp(-(1+e^{-x})e^t).$$

Le changement de variable $u = e^t$ est donné par une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $e^t > 0$, et $dt = du/u$. Pour $A < B$, il fournit

$$\int_A^B f_{0,1}(x-t)g(t) \, dt = e^{-x} \int_{e^A}^{e^B} u e^{-(1+e^{-x})u} \, du.$$

Les bornes de droite tendent vers 0 et $+\infty$ lorsque $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$. Le changement de variable conserve la nature des intégrales impropres. Celle de droite converge par b), donc celle de gauche converge également, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t) \, dt = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

- d) Les variables Y et $-Z$ sont indépendantes, car Y et Z le sont. Elles possèdent les densités $f_{0,1}$ et g . Le théorème de convolution donne donc une densité de $Y + (-Z) = Y - Z$, à savoir

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t) \, dt.$$

La convergence et la valeur de cette intégrale ont été établies en c). Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} Y - Z \text{ est à densité, avec} \\ h(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}}$$

Problème – II. Estimation par les moments

Les variables X_i sont indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(\mu, a)$, d'espérance $m = \mu + a\gamma$ et de variance $\sigma^2 = a^2c$, où $c > 0$. Le moment d'ordre 4 est admis fini. On étudie les moyennes $M_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ et $C_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

Corrigé – Problème – II. Estimation par les moments.**7. Convergence des estimateurs.**

a) Supposons $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} V$ et $W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} W$, et fixons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, posons

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + |\beta|)} > 0.$$

Si $|V_n - V| \leq \delta$ et $|W_n - W| \leq \delta$, l'inégalité triangulaire donne

$$|\alpha(V_n - V) + \beta(W_n - W)| \leq (|\alpha| + |\beta|)\delta < \varepsilon.$$

Par passage aux événements contraires et sous-additivité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|V_n - V| > \delta) \\ &\quad + \mathbb{P}(|W_n - W| > \delta) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ce raisonnement couvre aussi les coefficients nuls. On a donc démontré

$$\boxed{\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha V + \beta W.}$$

b) L'indépendance et l'identité des lois donnent

$$\mathbb{E}(M_n) = m, \quad \mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev fournit

$$\mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

Posons $b = \mathbb{E}(X_1^2)$. Les variables X_i^2 sont également indépendantes et de même loi. Elles possèdent une variance finie

$$\tau^2 = \mathbb{V}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_1^4) - b^2,$$

par l'hypothèse sur le moment d'ordre 4. Ainsi

$$\mathbb{E}(C_n) = b, \quad \mathbb{V}(C_n) = \frac{\tau^2}{n}, \quad \mathbb{P}(|C_n - b| > \varepsilon) \leq \frac{\tau^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = m, \quad C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2) = b.}$$

c) Pour chaque réalisation de l'échantillon,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2M_n}{n} \sum_{i=1}^n X_i + M_n^2 \\ &= C_n - M_n^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La racine définissant A_n est donc bien réelle. La continuité de $x \mapsto x^2$ et le théorème de transformation continue pour la convergence en probabilité donnent $M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} m^2$. D'après a),

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} b - m^2 = \mathbb{V}(X_1) = a^2 c.$$

Pour appliquer le même théorème sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la fonction continue $t \mapsto \sqrt{|t|}/\sqrt{c}$; sur les valeurs positives ou nulles prises par $C_n - M_n^2$, elle donne exactement A_n . Puisque $a > 0$ et $c > 0$,

$$A_n = \frac{\sqrt{C_n - M_n^2}}{\sqrt{c}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\sqrt{a^2 c}}{\sqrt{c}} = a.$$

L'estimateur ne dépend que de l'échantillon et de la constante connue c : c'est un estimateur convergent de a .

d) Par a), la convergence de M_n vers $m = \mu + a\gamma$ et celle de A_n vers a donnent

$$S_n = M_n - \gamma A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m - \gamma a = \mu.$$

Puisque S_n dépend uniquement de l'échantillon et des constantes connues c, γ , c'est un estimateur convergent de μ .

8. Calcul et lecture du graphique.

a) La fonction `np.std`, avec son paramétrage par défaut, calcule

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{C_n - M_n^2}.$$

Pour une liste `X` non vide et une constante `c` strictement positive, on peut donc écrire

```
import numpy as np
```

```
def estimateur_a(X):
    x = np.array(X)
    return np.std(x) / np.sqrt(c)
```

Les carrés des écarts sont calculés à partir de la moyenne. La division utilisée dans `np.std` est par n , conformément à A_n .

`estimateur_a(X)` renvoie la valeur de A_n .

En particulier, pour $n = 1$, cette valeur est 0.

b) Les cinq réalisations fluctuent différemment pour les petits échantillons, puis se rapprochent de la droite horizontale d'ordonnée 1 lorsque n augmente. L'axe des tailles d'échantillon est gradué logarithmiquement, de 1 à 10^3 . Les trajectoires ne sont pas monotones : elles peuvent dépasser 1, puis repasser en dessous. Ces observations sont cohérentes avec le résultat de la question 7, puisque le paramètre à estimer est ici $a = 1$, même si $\mu = 2$. La convergence en probabilité signifie précisément que, pour toute précision $\varepsilon > 0$, la probabilité de l'événement $[|A_n - 1| > \varepsilon]$ tend vers 0. Les cinq courbes illustrent ce résultat ; la démonstration repose sur la question 7.

Le graphique illustre la convergence de A_n vers $a = 1$.