

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2022

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.</i>	2
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	3
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; intégrales généralisées ; convergences de variables ; estimations ; Python.</i>	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.

Dans tout cet exercice, on fixe un réel a strictement supérieur à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. a) En notant, pour tout réel x et tout entier naturel k , $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer, pour k entier naturel non nul, $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .
- b) Compléter la fonction Python suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x , renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def f(n, x):
    t = 1 # t = t_0(x)
    s = 1 # s = f_0(x)
    for k in range(1, n + 1):
        t = ...
        s = ...
    return s
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n .
3. a) Soit x un réel positif. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.
- b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
4. a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$.
- b) Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.
- c) Dédurre des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

5. a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée. On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M$.
- b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- c) En déduire que $R_n(u_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
6. a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $e^x = f_n(x) + R_n(x)$.

- b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n = \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

7. a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

- b) En déduire que

$$e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

- c) Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

- d) En déduire finalement que

$$u_n - \ln(a) \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

2 Exercice 2

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'un endomorphisme h est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul. L'objectif est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre nilpotent.

- a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) On suppose que f est diagonalisable. En étudiant la trace de A , aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire sur f ?
- Montrer que $\ker(f + \text{Id}) \subset \ker((f + \text{Id})^2)$ et que ces deux noyaux ne sont pas égaux.
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2\text{Id}) \oplus \ker((f + \text{Id})^2)$. Pour simplifier les notations, on note désormais $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \ker((f + \text{Id})^2)$.
- Montrer que F et G sont stables par f .
- On note $P = (X+1)^2(X-2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul. On note désormais

$$\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2 \quad \text{et} \quad \pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}).$$

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.
7. a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?
b) En déduire une inclusion entre $\ker(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.
8. a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$.
b) En déduire une inclusion entre $\ker(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\ker(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$ et que $\ker(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7.a et 8.a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F . Identifier π_1 .

On pose maintenant $g = 2\pi_1 - \pi_2$ et $h = f - g$.

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f .
13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Montrer que $h = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2$. En déduire que $h^2 = 0$.
15. Conclure.

3 Problème

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; intégrales généralisées ; convergences de variables ; estimations ; Python.

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a , et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

Partie I

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
 - a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée, notée $f_{\mu,a}$, et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
 - b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
 - c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer. On note $G_{0,1}$ la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter $G_{0,1}$.
2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$. Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé. Soient μ et a des

réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la *loi de Gumbel de paramètre* (μ, a) , ce que l'on note $X \sim \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Montrer que $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) . On admet que, réciproquement, si $X \sim \mathcal{G}(\mu, a)$, alors $Z = \frac{X - \mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
4. a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
 b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def gumbel(mu, a):` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

```
import random
import math

def gumbel(mu, a):
    u = random.random()
    return mu - a * math.log(-math.log(u))
```

5. Soit $X \sim \mathcal{G}(\mu, a)$ et $Z = \frac{X - \mu}{a}$.
 a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du$ converge.
 b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge. On notera dans la suite $\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$.
 c) Montrer que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \gamma$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.
 d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de γ , μ et a .

On admet que X admet un moment d'ordre 4 et, en particulier, que la variance de X , notée σ^2 , est égale à a^2c , où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ .

6. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
 a) Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.
 b) Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} ue^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et déterminer sa valeur.
 c) À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t) dt$ converge.
 d) Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

Partie II

Soient μ et a deux réels tels que $a > 0$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad C_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

7. Méthode des moments

- Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires V et W , alors, pour tous réels α et β , la suite $(\alpha V_n + \beta W_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.
 - Montrer que les variables aléatoires M_n et C_n convergent en probabilité respectivement vers $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_1^2)$.
 - Montrer que $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de a .
 - Montrer alors que $S_n = M_n - A_n \gamma$ est un estimateur convergent de μ .
8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script Python des valeurs approchées de γ et de c , dans des variables notées `gamma` et `c`.
- Écrire une fonction Python d'en-tête `def estimateur_a(X):` renvoyant la valeur de l'estimateur A_n étudié précédemment, lorsque X est une liste de longueur n dont les éléments sont des réalisations de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

```
import math

def estimateur_a(X):
    n = len(X)
    m = sum(X) / n
    c_n = sum(x * x for x in X) / n
    return math.sqrt(c_n - m * m) / math.sqrt(c)
```

- La figure 1 représente l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur A_n , pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$. Commenter ce graphique.

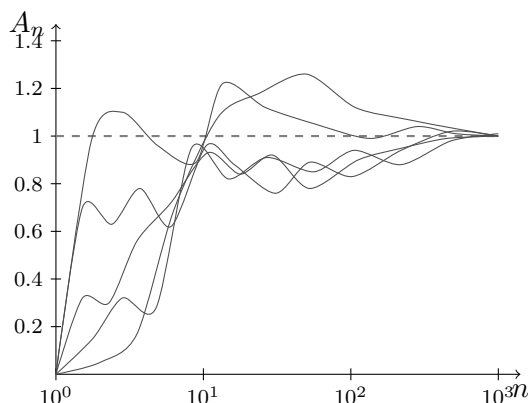


FIGURE 1 – Évolutions de A_n pour $\mu = 2$ et $a = 1$.