

# EDHEC

Mathématiques approfondies

## Corrigé du sujet adapté – 2022

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{V}$  désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice  $A$  est notée  ${}^tA$ .

### Exercice 1 – Loi conditionnelle et maximum

La variable  $X$  a une densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , et une fonction de répartition  $F$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on étudie la densité  $g(x) = f(x)/F(a)$  si  $x \leq a$ , nulle sinon. Les variables  $Y_i$  sont indépendantes de densité  $g$  ; on pose  $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$  puis  $Z_n = n(a - M_n)$ .

### Corrigé – Exercice 1 – Loi conditionnelle et maximum.

#### 1. Une densité obtenue par restriction.

La continuité et la stricte positivité de  $f$  donnent

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) \, dt \geq \int_{a-1}^a f(t) \, dt > 0.$$

De même,

$$1 - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t) \, dt \geq \int_a^{a+1} f(t) \, dt > 0.$$

Ainsi  $0 < F(a) < 1$  et la division définissant  $g$  est permise. La fonction  $g$  est positive ou nulle, continue sur chacun des intervalles séparés par  $a$ , et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \, dt = \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^a f(t) \, dt = 1.$$

Par conséquent,

$g$  est bien définie et est une densité de probabilité.

On note  $Y$  une variable ayant cette densité.

#### 2. Fonction de répartition et interprétation conditionnelle.

- a) Si  $x \leq a$ , l'intégration de  $g$  donne  $G(x) = F(x)/F(a)$ . Si  $x > a$ , on a  $\mathbb{P}(Y \leq a) = 1$ , donc  $G(x) = 1$ . Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)}, & x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Les deux formules se raccordent en  $a$ , où  $G(a) = 1$ .

- b) L'événement  $[X \leq a]$  a la probabilité strictement positive  $F(a)$ . Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{\mathbb{P}([X \leq x] \cap [X \leq a])}{F(a)}.$$

Pour  $x \leq a$ , l'intersection est  $[X \leq x]$  et le quotient vaut  $F(x)/F(a)$ . Pour  $x > a$ , l'intersection est  $[X \leq a]$  et le quotient vaut 1. Ce sont précisément les deux valeurs obtenues en a), d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \mathbb{P}_{[X \leq a]}(X \leq x).$$

### 3. Loi et limite du maximum.

- a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'événement  $[M_n \leq x]$  est  $\bigcap_{i=1}^n [Y_i \leq x]$ . L'indépendance et l'identité des lois donnent

$$G_n(x) = G(x)^n = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n, & x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

- b) Si  $x < a$ , on a  $F(a) - F(x) = \int_x^a f(t) dt > 0$ . Comme  $F(x) \geq 0$ , le quotient  $F(x)/F(a)$  appartient à  $[0, 1[$  ; sa puissance  $n$  tend vers 0. Si  $x > a$ ,  $G_n(x) = 1$  pour tout  $n$ . La variable aléatoire certaine  $A = a$  a pour fonction de répartition

$$F_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en tout  $x \neq a$ , et les limites précédentes donnent  $G_n(x) \rightarrow F_A(x)$  en chacun de ces points. Le critère de convergence en loi par les fonctions de répartition s'applique donc :

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} A, \quad \mathbb{P}(A = a) = 1.$$

### 4. Limite du maximum après changement d'échelle.

- a) Chaque  $Y_i$  est au plus égal à  $a$  presque sûrement, puisque  $G(a) = 1$  ; il en est donc de même de  $M_n$ . Ainsi  $Z_n = n(a - M_n) \geq 0$  presque sûrement, et  $H_n(x) = 0$  si  $x < 0$ . Pour  $x \geq 0$ ,

$$[Z_n \leq x] = \left[ M_n \geq a - \frac{x}{n} \right].$$

La variable  $M_n$  étant à densité,  $\mathbb{P}(M_n = b) = 0$  pour tout réel  $b$ . En particulier, pour  $b = a - x/n$ ,  $\mathbb{P}(M_n < b) = \mathbb{P}(M_n \leq b) = G_n(b)$ . On prend l'événement complémentaire et on utilise la question 3 :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \left[ \frac{F(a - x/n)}{F(a)} \right]^n, & x \geq 0. \end{cases}$$

En particulier,  $H_n(0) = 0$  pour tout  $n$ .

- b) Puisque  $f$  est continue, le théorème fondamental de l'analyse donne  $F'(a) = f(a)$ . La définition de la dérivabilité permet d'écrire

$$F(a + h) = F(a) + f(a)h + h\varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

en posant au besoin  $\varepsilon(0) = 0$ . Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on remplace  $h$  par  $-x/n$  et on divise par  $F(a) > 0$  :

$$\frac{F(a - x/n)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n} + \frac{\varepsilon_n(x)}{n}, \quad \varepsilon_n(x) = -\frac{x}{F(a)} \varepsilon(-x/n) \longrightarrow 0.$$

Le cas  $x = 0$  donne directement une égalité avec reste nul. On a donc bien, pour tout réel  $x$  fixé,

$$\boxed{\frac{F(a - x/n)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

c) Posons  $\lambda = f(a)/F(a) > 0$ . Pour  $x > 0$  fixé, la formule précédente donne

$$\frac{F(a - x/n)}{F(a)} = 1 + t_n, \quad t_n = \frac{-\lambda x + \varepsilon_n(x)}{n},$$

avec  $t_n \rightarrow 0$  et  $nt_n \rightarrow -\lambda x$ . Pour  $n$  assez grand,  $t_n \neq 0$  ; la dérivabilité du logarithme en 1 donne  $\ln(1 + t_n)/t_n \rightarrow 1$ . Par conséquent,

$$n \ln \left( \frac{F(a - x/n)}{F(a)} \right) = nt_n \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} \longrightarrow -\lambda x.$$

La continuité de l'exponentielle implique

$$\left[ \frac{F(a - x/n)}{F(a)} \right]^n \longrightarrow e^{-\lambda x}.$$

Ainsi  $H_n(x) \rightarrow 1 - e^{-\lambda x}$  pour  $x > 0$ . Pour  $x < 0$ ,  $H_n(x) = 0$  ; pour  $x = 0$ ,  $H_n(0) = 0$ . La fonction limite est donc

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Elle est continue sur  $\mathbb{R}$ , notamment en 0, et est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (dont une densité vaut  $\lambda e^{-\lambda x}$  pour  $x > 0$ , et 0 pour  $x \leq 0$ ). La convergence des fonctions de répartition donne finalement

$$\boxed{Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{E} \left( \frac{f(a)}{F(a)} \right).}$$

**Exercice 2 – Endomorphismes contractant les normes**

On étudie l'ensemble  $\mathcal{F}$  des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  pour lesquels il existe  $k \in [0, 1[$  tel que  $\|f(x)\| \leq k\|x\|$  pour tout  $x$ . Les calculs sont effectués dans la base canonique orthonormale.

**Corrigé – Exercice 2 – Endomorphismes contractant les normes.****1. Cas  $k = 0$ .**

L'inégalité devient  $\|f(x)\| \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ . Comme une norme est positive ou nulle, cela impose  $\|f(x)\| = 0$ , donc  $f(x) = 0$  pour tout  $x$ . Réciproquement, l'endomorphisme nul vérifie l'inégalité avec  $k = 0$ . Ainsi

Le seul endomorphisme convenant pour  $k = 0$  est l'endomorphisme nul.

En particulier, l'endomorphisme nul appartient à  $\mathcal{F}$ .

**2. Premier exemple matriciel.**

Posons

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{27}B.$$

a) Le produit matriciel donne

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 + 64 + 16 & -8 - 8 + 16 & 4 - 32 + 28 \\ -8 - 8 + 16 & 64 + 1 + 16 & -32 + 4 + 28 \\ 4 - 32 + 28 & -32 + 4 + 28 & 16 + 16 + 49 \end{pmatrix} = 81I_3.$$

Par conséquent,

$$A^2 = \frac{81}{27^2}I_3 = \frac{1}{9}I_3.$$

Si  $t$  est une valeur propre de  $A$  et  $v \neq 0$  un vecteur propre associé, alors  $A^2v = t^2v$  et  $A^2v = v/9$ . Ainsi  $(t^2 - 1/9)v = 0$ , ce qui impose  $t^2 = 1/9$ . Les deux valeurs propres possibles sont donc

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}.$$

b) La matrice  $A$  est réelle symétrique. Par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Ses valeurs propres appartiennent à  $\{\lambda, \mu\}$ . Si elle n'en avait qu'une seule, notée  $t$ , sa matrice diagonale dans une base de diagonalisation serait  $tI_3$  ; le changement de base donnerait alors  $A = tI_3$ . Cela est impossible puisque  $A$  possède des coefficients non nuls hors de la diagonale. Les deux valeurs sont donc effectivement présentes :

$$A \text{ est diagonalisable,} \quad \text{Sp}(A) = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}.$$

c) La diagonalisabilité assure que la somme des deux sous-espaces propres est  $\mathbb{R}^3$  et que cette somme est directe. Pour  $y \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id})$ , la symétrie donne

$$\lambda \langle y, z \rangle = \langle f(y), z \rangle = \langle y, f(z) \rangle = \mu \langle y, z \rangle.$$

Comme  $\lambda \neq \mu$ , on a  $\langle y, z \rangle = 0$ . Ainsi

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{Id}),$$

et ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

- d) Écrivons  $x = y + z$  suivant cette décomposition orthogonale. Alors  $f(x) = \lambda y + \mu z$  et, par orthogonalité,

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2, \quad \|f(x)\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + \mu^2 \|z\|^2 = \frac{1}{9} \|x\|^2.$$

En prenant les racines carrées,

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| = \frac{1}{3} \|x\|, \quad f \in \mathcal{F} \text{ avec } k = \frac{1}{3}.$$

### 3. Quelques propriétés de $\mathcal{F}$ .

- a) Si  $\text{Id}$  appartenait à  $\mathcal{F}$ , il existerait  $k < 1$  tel que  $\|x\| \leq k\|x\|$  pour tout  $x$ . Pour  $x \neq 0$ , la division par  $\|x\| > 0$  donnerait  $1 \leq k$ , contradiction. Ainsi

$$\text{Id} \notin \mathcal{F}.$$

- b) L'endomorphisme  $h = \frac{1}{2}\text{Id}$  appartient à  $\mathcal{F}$ , puisque  $\|h(x)\| = \frac{1}{2}\|x\|$ . Mais  $2h = \text{Id}$  n'y appartient pas. L'ensemble n'est donc pas stable par multiplication par un réel, et

$$\mathcal{F} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

- c) Soient  $f, g \in \mathcal{F}$ . Il existe  $k_f, k_g \in [0, 1[$  tels que  $\|f(x)\| \leq k_f\|x\|$  et  $\|g(x)\| \leq k_g\|x\|$  pour tout  $x$ . Alors

$$\|f(g(x))\| \leq k_f\|g(x)\| \leq k_f k_g \|x\|.$$

Le produit  $k_f k_g$  appartient encore à  $[0, 1[$ , donc

$$f, g \in \mathcal{F} \implies f \circ g \in \mathcal{F}.$$

- d) Supposons  $f \in \mathcal{F}$  inversible. Si  $f^{-1}$  appartenait aussi à  $\mathcal{F}$ , la stabilité par composition donnerait  $f \circ f^{-1} = \text{Id} \in \mathcal{F}$ , contrairement à a). Ainsi

$$f \in \mathcal{F} \text{ inversible} \implies f^{-1} \notin \mathcal{F}.$$

### 4. Projecteurs et symétries.

- a) Soit  $p \in \mathcal{F}$  un projecteur, donc  $p^2 = p$ . Il existe  $k \in [0, 1[$  tel que  $\|p(x)\| \leq k\|x\|$  pour tout  $x$ . En appliquant cette inégalité au vecteur  $p(x)$ ,

$$\|p(x)\| = \|p(p(x))\| \leq k\|p(x)\|.$$

Comme  $1 - k > 0$ , cela impose  $\|p(x)\| = 0$  pour tout  $x$ , donc  $p = 0$ . Réciproquement, l'endomorphisme nul est un projecteur et appartient à  $\mathcal{F}$ . Ainsi

$$\text{Le seul projecteur de } \mathcal{F} \text{ est le projecteur nul.}$$

- b) Une symétrie  $s$  vérifie  $s^2 = \text{Id}$ . Si elle appartenait à  $\mathcal{F}$ , la stabilité par composition entraînerait  $\text{Id} \in \mathcal{F}$ , ce qui est impossible. Donc

$$\mathcal{F} \text{ ne contient aucune symétrie.}$$

## Corrigé – Exercice 2 – Endomorphismes symétriques et valeurs propres.

## 5. Caractérisation pour un endomorphisme symétrique.

- a) Le théorème spectral fournit une base orthonormale  $(v_1, v_2, v_3)$  de vecteurs propres, avec  $f(v_i) = \lambda_i v_i$ . Posons

$$k = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(f)\}.$$

Pour  $x = \sum_{i=1}^3 x_i v_i$ , l'orthonormalité donne

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 x_i^2 \leq k^2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 = k^2 \|x\|^2.$$

Le nombre  $k$  étant positif ou nul, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| \leq k \|x\|.$$

- b) Si  $f \in \mathcal{F}$ , choisissons  $k_0 \in [0, 1[$  vérifiant l'inégalité de définition. Pour une valeur propre  $\lambda$  et un vecteur propre  $v \neq 0$ ,

$$|\lambda| \|v\| = \|f(v)\| \leq k_0 \|v\|.$$

Ainsi  $|\lambda| \leq k_0 < 1$ , donc toutes les valeurs propres appartiennent à  $] -1, 1[$ . Réciproquement, si toutes les valeurs propres sont dans cet intervalle, leur nombre fini assure que le maximum  $k$  de leurs valeurs absolues appartient à  $[0, 1[$ . La question a) fournit alors exactement l'inégalité requise pour  $f \in \mathcal{F}$ . Donc

$$f \in \mathcal{F} \iff \text{Sp}(f) \subset ] -1, 1[ \quad (f \text{ symétrique}).$$

## 6. Deuxième exemple matriciel.

Posons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{6} B.$$

- a) Les produits matriciels donnent

$$B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9B.$$

Par conséquent,

$$A^3 = \frac{B^3}{6^3} = \frac{9B}{216} = \frac{1}{4} A.$$

Un polynôme annulateur de degré 3 est donc

$$P(X) = X^3 - \frac{1}{4} X = X \left( X - \frac{1}{2} \right) \left( X + \frac{1}{2} \right).$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre et  $v \neq 0$  un vecteur propre associé, alors  $P(A)v = P(\lambda)v = 0$ , donc  $P(\lambda) = 0$ . On obtient les valeurs propres possibles

$$\text{Sp}(f) \subset \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}.$$

- b) La matrice  $A$  est réelle symétrique, donc  $f$  est un endomorphisme symétrique. Toutes ses valeurs propres appartiennent à  $] -1, 1[$ , d'après la question a). La caractérisation de la question 5 donne donc  $f \in \mathcal{F}$ . De plus, le maximum des valeurs absolues de ses valeurs propres est au plus  $1/2$ , et la question 5 a) entraîne

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|, \quad f \in \mathcal{F} \text{ avec } k = \frac{1}{2}.$$

Pour vérifier que  $1/2$  est bien le maximum exact demandé en question c), on peut remarquer que

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $1/2$  est effectivement une valeur propre et

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(f)\} = \frac{1}{2}.$$

- c) Le script calcule les valeurs propres avec `al.eig`, puis prend le maximum de leurs valeurs absolues. Le second tableau renvoyé par `al.eig` contient les vecteurs propres et n'intervient pas dans ce calcul.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A = np.array([[0, -2, 2],
              [-2, -1, 0],
              [2, 0, 1]]) / 6
valeurs, vecteurs = al.eig(A)
k = np.max(np.abs(valeurs))
print(k)
Ainsi
```

$$k = \frac{1}{2} \quad (\text{à la précision des calculs numériques}).$$

**Exercice 3 – Une somme aléatoire de Bernoulli**

Conditionner par le nombre  $N$  de termes permet d'utiliser une loi binomiale. La formule des probabilités totales donne la loi de la somme aléatoire ; les sommes de l'exemple se calculent avec la normalisation et l'espérance d'une loi de Poisson.

**Corrigé – Exercice 3 – Une somme aléatoire de Bernoulli.**

On rappelle  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p \in ]0, 1[$ .

**1. Valeurs possibles et existence de l'espérance.**

- a) Chaque  $X_i$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  et  $N$  est un entier strictement positif. Ainsi  $S$  est un entier naturel :  $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . Par hypothèse,  $\mathbb{P}(N = n) > 0$  pour tout entier  $n \geq 1$ . L'indépendance donne

$$\mathbb{P}(N = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(N = 1)q > 0,$$

donc 0 est une valeur possible de  $S$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(N = k, X_1 = 1, \dots, X_k = 1) = \mathbb{P}(N = k)p^k > 0.$$

Sur cet événement,  $S = k$ . Chaque entier naturel est donc atteint, et

$$S(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- b) Pour tout  $\omega \in \Omega$ , la somme contient  $N(\omega)$  termes compris entre 0 et 1. On a donc

$$0 \leq S \leq N.$$

La variable  $N$  possède une espérance finie. Par comparaison de variables positives,  $\mathbb{E}(S) \leq \mathbb{E}(N) < +\infty$ . Comme  $|S| = S$ , son espérance est bien définie :

$$S \text{ possède une espérance finie.}$$

**2. Loi et espérance de  $S_n$ .**

Pour  $n \geq 1$ ,  $S_n$  est la somme de  $n$  variables de Bernoulli de paramètre  $p$  mutuellement indépendantes. Par définition de la loi binomiale,

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p), \quad \mathbb{E}(S_n) = np.$$

En particulier, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

et cette probabilité vaut 0 pour les autres entiers  $k$ .

**3. Loi de  $S$  par conditionnement.**

La famille  $([N = n])_{n \geq 1}$  est un système complet d'événements, puisque  $N$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Chacun de ces événements possède une probabilité strictement positive. Sur  $[N = n]$ , la somme  $S$  est égale à  $S_n$ . De plus,  $S_n$ , fonction de  $(X_1, \dots, X_n)$ , est indépendante de  $N$ . La formule des probabilités totales donne, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k \mid N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n). \end{aligned}$$

Pour  $n < k$ ,  $S_n \leq n < k$ , donc les termes correspondants sont nuls. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n).$$

**4. Exemple où  $N - 1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .**

On suppose  $\lambda > 0$ .

a) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N - 1 = n - 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ces probabilités sont strictement positives. La relation  $N = (N - 1) + 1$  donne également  $\mathbb{E}(N) = \lambda + 1$ .

b) Soit  $k \geq 1$ . En remplaçant les deux probabilités dans la question 3,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Pour calculer la somme, posons  $a = \lambda q > 0$  et  $m = n - k$ . Soit  $Z$  une variable de loi  $\mathcal{P}(a)$ . Sa loi a pour probabilités  $e^{-a} a^m / m!$ ,  $m \geq 0$ , et son espérance vaut  $a$ . Par la définition de l'espérance d'une variable discrète,

$$e^{-a} \sum_{m=0}^{+\infty} (m+k) \frac{a^m}{m!} = \mathbb{E}(Z+k) = a+k.$$

Cette somme converge donc et vaut  $e^a(a+k)$ . Le changement d'indice, sans modifier l'ordre des termes, donne

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{\lambda q} (\lambda q + k).$$

Comme  $-\lambda + \lambda q = -\lambda p$ , il vient

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}.$$

c) La variable  $S$  peut également prendre la valeur 0. En conditionnant à nouveau par le système complet  $([N = n])_{n \geq 1}$ , et en utilisant  $\mathbb{P}(S_n = 0) = q^n$ , on obtient directement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} q^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= q e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^m}{m!}. \end{aligned}$$

La normalisation de la loi  $\mathcal{P}(\lambda q)$  donne  $e^{-\lambda q} \sum_{m \geq 0} (\lambda q)^m / m! = 1$ . Par conséquent

$$\mathbb{P}(S = 0) = qe^{-\lambda} e^{\lambda q} = qe^{-\lambda p}.$$

Avec la formule de b), cette probabilité complète la loi de  $S$  sur  $\mathbb{N}$ .

**d)** Sur  $[N = n]$ , la somme a la loi de  $S_n$ , donc

$$\mathbb{E}(S \mid [N = n]) = np.$$

La formule de l'espérance totale, autorisée par l'énoncé, fournit alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(S \mid [N = n]) \mathbb{P}(N = n) \\ &= p \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(N = n) = p \mathbb{E}(N) = p(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{E}(X) = p$ , on obtient bien

$$\mathbb{E}(S) = p(\lambda + 1) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(N).$$

## 5. Simulation de $S$ .

On simule d'abord  $N - 1$  par une loi de Poisson de paramètre `lamb`, puis on ajoute 1. Conditionnellement à cette valeur de  $N$ , la loi de  $S$  est binomiale de paramètres  $N$  et  $p$  :

```
import numpy.random as rd

def S(lamb, p):
    N = rd.poisson(lamb) + 1
    y = rd.binomial(N, p)
    return y
```

La fonction s'utilise pour `lamb > 0` et `0 < p < 1`.

`S(lamb,p)` simule la somme aléatoire de l'énoncé.

**Problème – Question préliminaire**

On utilise la notation  $f(x) \sim h(x)$  pour signifier que  $f(x)/h(x) \rightarrow 1$  à la limite indiquée, lorsque le quotient est défini.

**Corrigé – Problème – Question préliminaire.****1. Équivalent du logarithme.**

Pour  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$  et

$$\ln f(x) = \ln x + \ln \left( \frac{f(x)}{x} \right).$$

Comme  $f(x)/x \rightarrow 1$ , la continuité de  $\ln$  en 1 donne  $\ln(f(x)/x) \rightarrow 0$ . Or  $\ln x \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , donc

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(f(x)/x)}{\ln x} \rightarrow 1.$$

Ainsi  $\boxed{\ln f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x.}$

**Problème – I. Deux fonctions définies par l'exponentielle**

On définit sur  $\mathbb{R}$  les fonctions  $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$  et  $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ . Toutes leurs propriétés seront obtenues à partir de ces expressions.

**Corrigé – Problème – I. Deux fonctions définies par l'exponentielle.****2. Étude de sh.**

a) Par définition,

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x).$$

Donc  $\boxed{\text{sh} \text{ est impaire.}}$

b) Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) > 0.$$

Elle est donc strictement croissante. Ses limites aux deux extrémités sont respectivement  $-\infty$  et  $+\infty$ , et  $\text{sh}(0) = 0$ . Ainsi

|                 |           |                       |           |
|-----------------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | $0$                   | $+\infty$ |
| $\text{sh}'(x)$ |           | $+$                   | $+$       |
| $\text{sh}(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow 0 \nearrow$ | $+\infty$ |

c) La dérivabilité en 0, avec  $\text{sh}(0) = 0$  et  $\text{sh}'(0) = 1$ , donne

$$\frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0} \rightarrow 1.$$

Ainsi  $\boxed{\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.}$

**3. Étude de ch.**

a) On a  $\text{ch}(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = \text{ch}(x)$ , donc

ch est paire.

b) La dérivée est  $\text{ch}' = \text{sh}$ . Son signe est négatif pour  $x < 0$ , nul en 0 et positif pour  $x > 0$ . De plus  $\text{ch}(0) = 1$ , et ch tend vers  $+\infty$  aux deux extrémités. D'où

|                 |           |                         |           |
|-----------------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | 0                       | $+\infty$ |
| $\text{ch}'(x)$ |           | - 0 +                   |           |
| $\text{ch}(x)$  | $+\infty$ | $\searrow$ 1 $\nearrow$ | $+\infty$ |

En particulier  $\text{ch}(x) \geq 1$  pour tout réel  $x$ .

**4. Identité fondamentale.**

En développant les deux carrés,

$$\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1.$$

Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1.$

**Problème – II. Quotient et primitive**

On pose  $\text{th} = \text{sh} / \text{ch}$ . On étudie ce quotient et une primitive de  $1/\text{sh}$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Corrigé – Problème – II. Quotient et primitive.****5. Étude de th.**

a) Le dénominateur  $\text{ch}(x)$  est strictement positif pour tout  $x$ . Donc

$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) La parité des deux fonctions précédentes donne

$$\text{th}(-x) = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x).$$

Donc th est impaire.

c) La règle de dérivation d'un quotient et la question 4 donnent

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = \frac{1}{\text{ch}(x)^2} > 0.$$

Donc th est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

d) On écrit

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

La limite en  $+\infty$  est 1, et l'impairité donne la limite  $-1$  en  $-\infty$ . La valeur en 0 est 0, d'où

| $x$             | $-\infty$ | 0                                                 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|---------------------------------------------------|-----------|
| $\text{th}'(x)$ |           | $\begin{smallmatrix} + & 1 & + \end{smallmatrix}$ |           |
| $\text{th}(x)$  | $-1$      | $\nearrow 0 \nearrow$                             | $1$       |

## 6. Identité algébrique et primitive.

- a) Pour  $x > 0$ , posons  $y = e^{-x} \in ]0, 1[$ . On a  $1/\text{sh}(x) = 2y/(1 - y^2)$ , tandis que l'expression proposée vaut

$$\frac{ay}{1-y} + \frac{by}{1+y} = \frac{y((a+b) + (a-b)y)}{1-y^2}.$$

L'égalité pour tout  $y \in ]0, 1[$  impose  $a+b=2$  et  $a-b=0$ , d'où

$$a=b=1, \quad \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

- b) Les fonctions  $1-e^{-x}$  et  $1+e^{-x}$  sont strictement positives sur  $]0, +\infty[$ . La dérivation des logarithmes donne

$$\frac{d}{dx} [\ln(1-e^{-x}) - \ln(1+e^{-x})] = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Or  $\text{th}(x/2) = (1-e^{-x})/(1+e^{-x})$ . Ainsi une primitive demandée est

$$L(x) = \ln \left( \text{th} \left( \frac{x}{2} \right) \right), \quad L'(x) = \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

## 7. Équivalent du logarithme de $\text{th}(x/2)$ .

La question 2 et la continuité de  $\text{ch}$  donnent  $\text{th}(t)/t \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Donc la fonction  $h(x) = 2\text{th}(x/2)$  vérifie  $h(x)/x \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$  et elle est strictement positive pour  $x > 0$ . La preuve de la question 1, qui utilise seulement ces propriétés près de 0, donne  $\ln h(x)/\ln x \rightarrow 1$ . Comme  $\ln \text{th}(x/2) = \ln h(x) - \ln 2$  et  $\ln 2/\ln x \rightarrow 0$ , on obtient

$$\ln \left( \text{th} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x.$$

## Problème – III. Une série convergente

Pour  $x > 0$ , on compare la somme des  $1/\text{sh}(kx)$  aux intégrales d'une fonction décroissante, afin de contrôler la somme puis d'en trouver un équivalent lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .

## Corrigé – Problème – III. Une série convergente.

### 8. Comparaison avec des intégrales.

- a) Pour  $x > 0$  fixé,  $t \mapsto \text{sh}(tx)$  est strictement positive et croissante sur  $]0, +\infty[$ . Son inverse  $h_x(t) = 1/\text{sh}(tx)$  est donc décroissant. Pour  $t \in [k, k+1]$ ,  $h_x(k+1) \leq$

$h_x(t) \leq h_x(k)$ . En intégrant sur ce segment de longueur 1,

$$\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\text{sh}(tx)} \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

- b) La borne de droite sommée pour  $k = 1, \dots, n$  donne la minoration de la somme. Pour la majoration, on utilise  $h_x(k) \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt$  pour  $k \geq 2$ , puis on ajoute  $h_x(1)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{dt}{\text{sh}(tx)} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \\ &\leq \int_1^n \frac{dt}{\text{sh}(tx)} + \frac{1}{\text{sh}(x)}. \end{aligned}$$

## 9. Convergence, encadrement et équivalent de la somme.

- a) Pour  $k \geq 1$ ,

$$0 < \frac{1}{\text{sh}(kx)} = \frac{2e^{-kx}}{1 - e^{-2kx}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2x}} (e^{-x})^k.$$

La série géométrique de raison  $e^{-x} \in ]0, 1[$  converge. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \text{ converge pour tout } x > 0.$$

- b) La primitive de la question 6 donne, pour  $B > 1$ ,

$$\int_1^B \frac{dt}{\text{sh}(tx)} = \frac{1}{x} \left[ \ln \text{th} \left( \frac{tx}{2} \right) \right]_1^B.$$

Puisque  $\text{th}(Bx/2) \rightarrow 1$  lorsque  $B \rightarrow +\infty$ , le logarithme tend vers 0. L'intégrale impropre converge donc et vaut

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(tx)} = -\frac{1}{x} \ln \text{th} \left( \frac{x}{2} \right).$$

On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'encadrement de la question 8 : les deux intégrales convergent vers  $I(x)$  et la somme partielle converge d'après a). Ainsi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} \ln \text{th} \left( \frac{x}{2} \right) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \\ &\leq -\frac{1}{x} \ln \text{th} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}. \end{aligned}$$

- c) Pour  $0 < x < 1$ , posons  $b(x) = -\ln x/x > 0$ . La question 7 donne

$$\frac{I(x)}{b(x)} = \frac{\ln \text{th}(x/2)}{\ln x} \longrightarrow 1.$$

La question 2 donne aussi

$$\frac{1/\text{sh}(x)}{b(x)} = \frac{x/\text{sh}(x)}{-\ln x} \longrightarrow 0.$$

En divisant les trois membres de l'encadrement par  $b(x) > 0$ , les deux bornes tendent vers 1. Le théorème d'encadrement donne donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.$$

### 10. Calcul d'une somme partielle en Python.

On exprime chaque terme avec les exponentielles. La forme utilisant  $e^{-kx}$  évite le calcul d'une exponentielle d'argument positif très grand.

```
import numpy as np

def somme(n, x):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        y = np.exp(-k*x)
        S = S+2*y/(1-y**2)
    return S

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = float(input("Entrez une valeur positive pour x : "))
print(somme(n, x))
```

La fonction prend un entier  $n \geq 1$  et un réel  $x > 0$ . À chaque itération, elle ajoute  $1/\operatorname{sh}(kx)$  à la somme déjà calculée ; sa valeur renvoyée est donc

$$\text{somme}(n, x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}.$$