

emlyon

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2022

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Problème 1 – A. Mise en place d'un exemple

Décomposition d'une matrice à l'aide de deux bases orthonormales, valeurs singulières et pseudo-inverse. Une application donne les vecteurs minimisant la distance entre un vecteur fixé et les images par un endomorphisme.

Corrigé – Problème 1 – A. Mise en place d'un exemple.

1. Premières propriétés de A .

- a) La deuxième ligne de A est nulle, donc son rang est au plus 2. Les deux premières colonnes $(0, 0, -1)$ et $(1, 0, 0)$ sont indépendantes, donc son rang est au moins 2. Ainsi

$$\operatorname{rg}(A) = 2, \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

On peut également résoudre $AX = 0$: les équations sont $x_2 + x_3 = 0$ et $-x_1 + x_3 = 0$. Elles donnent

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Les produits matriciels donnent

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant A^2 de A^3 puis en ajoutant A , chaque coefficient s'annule. Ainsi

$$A^3 - A^2 + A = 0.$$

- c) Si λ est une valeur propre réelle de A , l'identité précédente donne

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda \left[\left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 0.$$

Le facteur entre crochets est strictement positif pour tout réel λ , donc $\lambda = 0$. Cette valeur propre existe puisque le noyau de A est non nul. Par conséquent,

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}.$$

Si A était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sa matrice diagonale dans une base de diagonalisation aurait tous ses coefficients diagonaux nuls ; cette matrice serait nulle, donc $A = 0$. C'est impossible. Ainsi

A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

2. Diagonalisation orthogonale de B .

a) Le calcul de $B = {}^tAA$ donne

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est réelle symétrique. Le théorème spectral assure donc qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

b) Notons les colonnes de R sous la forme

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Leurs normes au carré valent respectivement $(1 + 1 + 4)/6 = 1$, $(1 + 1)/2 = 1$ et $(1 + 1 + 1)/3 = 1$. Leurs produits scalaires sont

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{-1 + 1}{\sqrt{12}} = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = \frac{-1 - 1 + 2}{\sqrt{18}} = 0, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1 - 1}{\sqrt{6}} = 0.$$

Les colonnes sont donc orthonormales : ${}^tRR = I_3$. Ainsi

R est orthogonale, $R^{-1} = {}^tR$.

ii) Les produits par B donnent

$$Bv_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3v_1, \quad Bv_2 = v_2, \quad Bv_3 = 0.$$

Donc $BR = R \operatorname{diag}(3, 1, 0)$. En multipliant à gauche par ${}^tR$,

${}^tRBR = \operatorname{diag}(3, 1, 0)$.

Corrigé – Problème 1 – B. Valeurs singulières.

3. Identité des produits scalaires.

Soient X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x, y dans la base canonique. Alors

$$\langle x, g(y) \rangle = {}^tX {}^tMY = {}^t(MX)Y = \langle f(x), y \rangle.$$

En remplaçant y par $f(x)$ et en utilisant $h = g \circ f$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, g(y) \rangle &= \langle f(x), y \rangle, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, h(x) \rangle &= \|f(x)\|^2. \end{aligned}$$

4. Noyau et rang de h .

a) Si $x \in \text{Ker } h$, la question 3 donne $\|f(x)\|^2 = \langle x, h(x) \rangle = 0$. Ainsi $f(x) = 0$, donc

$$\text{Ker } h \subset \text{Ker } f.$$

b) Réciproquement, si $f(x) = 0$, alors $h(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$. Les deux noyaux sont donc égaux. Par le théorème du rang,

$$\text{Ker } h = \text{Ker } f, \quad \text{rg}(h) = n - \dim \text{Ker } f = r.$$

5. Valeurs propres de h .

a) La matrice de h est ${}^tMM$, et ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$. Cette matrice est réelle symétrique. Le théorème spectral fournit donc

$$\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{ base orthonormale de vecteurs propres de } h.$$

En particulier, h est diagonalisable.

b) Si $h(x) = \lambda x$ pour un vecteur $x \neq 0$, la question 3 donne

$$\lambda \|x\|^2 = \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on a

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(h), \quad \lambda \geq 0.$$

6. Diagonalisation de ${}^tMM$.

Les colonnes de P sont les coordonnées de la base orthonormale $\mathcal{B}_1$ dans la base canonique. Elles sont donc orthonormales, ce qui donne ${}^tPP = I_n$ et $P^{-1} = {}^tP$. Si $h(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$, la matrice de h dans $\mathcal{B}_1$ est $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Le changement de base et la question 5 donnent

$$\begin{aligned} P \text{ est orthogonale, } \lambda_i &\geq 0, \\ {}^tMM &= PDP^{-1} = PD{}^tP. \end{aligned}$$

7. Cas d'une matrice symétrique.

Si M est symétrique, le théorème spectral fournit une base orthonormale de vecteurs propres de M . Si v est l'un de ces vecteurs, associé à une valeur propre μ , alors

$$({}^tMM)v = M^2v = \mu^2v.$$

Les coefficients diagonaux d'une diagonalisation de ${}^tMM$ sont donc les carrés des coefficients d'une diagonalisation de M . En prenant les racines carrées positives ou nulles,

$$\begin{aligned} \text{Les valeurs singulières de } M &\text{ sont les valeurs absolues} \\ &\text{de ses valeurs propres.} \end{aligned}$$

Cette liste conserve les répétitions apparaissant dans une base de diagonalisation, à l'ordre près.

8. Nombre de valeurs singulières non nulles.

La matrice ${}^tMM$ représente h , de rang r par la question 4. Comme P est inversible et $D = P^{-1}({}^tMM)P$, on a $\text{rg}(D) = r$. Le rang d'une matrice diagonale est le nombre de ses coefficients diagonaux non nuls. Ainsi

D possède exactement r coefficients diagonaux non nuls.

On les place désormais en premières positions. Si $r = 0$, alors $M = 0$, $D = 0$ et toutes les valeurs singulières sont nulles.

9. Construction d'une base à l'arrivée.

a) Pour $1 \leq i \leq r$, on a $\lambda_i > 0$. Comme ε_i est unitaire,

$$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i) \rangle = \lambda_i \|\varepsilon_i\|^2 = \lambda_i.$$

Ainsi

$$f(\varepsilon_i) \neq 0, \quad \|f(\varepsilon_i)\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i.$$

b) Pour $1 \leq i, j \leq r$, l'identité de la question 3 donne

$$\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_j) \rangle = \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle.$$

En divisant par $\sigma_i \sigma_j > 0$, on obtient

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Donc

$$(u_1, \dots, u_r) \text{ est une famille orthonormale.}$$

c) On peut compléter cette famille en une base orthonormale $\mathcal{B}_2 = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Pour $i \leq r$, on a $f(\varepsilon_i) = \sigma_i u_i$. Pour $i > r$, $\lambda_i = 0$, donc $\varepsilon_i \in \text{Ker } h = \text{Ker } f$ et $f(\varepsilon_i) = 0$. Les colonnes de la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$ au départ et $\mathcal{B}_2$ à l'arrivée sont donc celles de

$$\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

Lorsque $r = 0$, la famille initiale est vide : on choisit n'importe quelle base orthonormale $\mathcal{B}_2$, et la matrice est nulle puisque $f = 0$. Lorsque $r = n$, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est déjà une base.

10. Décomposition de M dans les deux bases orthonormales.

Les colonnes de Q sont les coordonnées de $\mathcal{B}_2$ dans la base canonique : elles sont orthonormales, donc $Q^{-1} = {}^tQ$. La matrice de f avec la base canonique au départ et $\mathcal{B}_2$ à l'arrivée est, d'une part, $Q^{-1}M = {}^tQM$. D'autre part, le passage des coordonnées canoniques aux coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ se fait par $P^{-1} = {}^tP$, puis l'application de f est représentée par Δ . Cette même matrice est donc $\Delta {}^tP$. Ainsi ${}^tQM = \Delta {}^tP$. En multipliant à gauche par Q , on obtient

$$Q \text{ est orthogonale,} \quad M = Q\Delta {}^tP.$$

11. Décomposition de la matrice de l'exemple.

On choisit $P_1 = R$: d'après la question 2, les valeurs propres de ${}^tAA$ sont, dans cet ordre, 3, 1, 0. Ainsi

$$\Delta_1 = \text{diag}(\sqrt{3}, 1, 0).$$

Avec les colonnes v_1, v_2, v_3 de R , le calcul donne

$$Av_1 = \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Av_3 = 0.$$

Les deux premiers vecteurs unitaires à l'arrivée sont donc $u_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ et $u_2 = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$. On les complète par $u_3 = (0, 1, 0)$, unitaire et orthogonal aux deux précédents. On peut donc prendre

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P_1 et Q_1 sont orthonormales. Les calculs précédents donnent $AP_1 = Q_1\Delta_1$, donc

$$A = Q_1\Delta_1{}^tP_1.$$

Corrigé – Problème 1 – C. Pseudo-inverse et minimisation.

Notons $\Delta^+ = \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r, 0, \dots, 0)$, avec $\Delta^+ = 0$ si $r = 0$. La définition de la pseudo-inverse est $M^+ = P\Delta^+{}^tQ$.

12. Pseudo-inverse d'une matrice inversible.

Si M est inversible, $r = n$, donc toutes les valeurs singulières sont strictement positives et $\Delta^+ = \Delta^{-1}$. La formule $M = Q\Delta^tP$ entraîne

$$M^{-1} = ({}^tP)^{-1}\Delta^{-1}Q^{-1} = P\Delta^{-1}{}^tQ.$$

Ainsi

$$M \text{ inversible} \implies M^+ = M^{-1}.$$

13. Projecteur orthogonal associé à la pseudo-inverse.

a) Posons $J_r = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, avec r coefficients égaux à 1 et $n - r$ coefficients nuls. Comme ${}^tPP = I_n$ et $\Delta\Delta^+ = J_r$,

$$MM^+ = Q\Delta^tPP\Delta^+{}^tQ = QJ_r{}^tQ.$$

Donc

$$MM^+ = QJ_r{}^tQ.$$

Pour $r = 0$, J_r et ce produit sont nuls.

b) Notons $\Pi = MM^+$. La matrice J_r est symétrique et vérifie $J_r^2 = J_r$. On a donc

$$\Pi^2 = QJ_r^t Q Q J_r^t Q = QJ_r^{2t} Q = \Pi, \quad {}^t\Pi = Q^t J_r^t Q = \Pi.$$

L'endomorphisme p est ainsi un projecteur symétrique. Pour vérifier qu'il est orthogonal, prenons $z \in \text{Im } p$ et $w \in \text{Ker } p$. Il existe v tel que $z = p(v)$; la symétrie donne

$$\langle z, w \rangle = \langle p(v), w \rangle = \langle v, p(w) \rangle = 0.$$

Son image et son noyau sont donc orthogonaux, et

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal.}}$$

c) Les matrices Q et ${}^tQ$ sont inversibles, donc

$$\text{rg}(MM^+) = \text{rg}(J_r) = r.$$

Comme $p = f \circ f^+$, on a $\text{Im } p \subset \text{Im } f$. Ces deux sous-espaces ont la même dimension r , donc

$$\boxed{\text{rg}(MM^+) = r, \quad \text{Im } p = \text{Im } f.}$$

14. Minimisation de la distance à l'image de f .

a) On a $y - p(y) \in \text{Ker } p$, puisque $p(y - p(y)) = p(y) - p^2(y) = 0$. En outre, $p(y) - f(x) \in \text{Im } p$, d'après la question 13. Ces deux vecteurs sont orthogonaux, et

$$y - f(x) = (y - p(y)) + (p(y) - f(x)).$$

Le théorème de Pythagore donne

$$\|y - f(x)\|^2 = \|y - p(y)\|^2 + \|p(y) - f(x)\|^2 \geq \|y - p(y)\|^2.$$

En prenant les racines carrées, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|.}$$

L'égalité a lieu exactement lorsque $f(x) = p(y)$.

b) Prenons $x^* = f^+(y)$. Alors $f(x^*) = f(f^+(y)) = p(y)$, donc ce vecteur atteint la borne de a). Ainsi

$$\boxed{x^* = f^+(y), \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\| = \|y - p(y)\|.}$$

Si $r < n$, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f = n - r \geq 1$. Il existe donc $z \neq 0$ dans ce noyau, et $x^* + z \neq x^*$ vérifie $f(x^* + z) = f(x^*) = p(y)$. Les deux vecteurs sont bien des minimiseurs distincts. Plus précisément, $f(x) = p(y)$ équivaut à $f(x - x^*) = 0$, donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des minimiseurs est } f^+(y) + \text{Ker } f.}$$

Si $r = 0$, on a $f = f^+ = p = 0$: tous les vecteurs x sont minimiseurs et le minimum vaut $\|y\|$, conformément aux formules précédentes.

15. Minimisation dans l'exemple.

a) Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$f_1(x) = (x_2 + x_3, 0, -x_1 + x_3).$$

L'image est incluse dans le plan de deuxième coordonnée nulle. Réciproquement, tout vecteur $(a, 0, b)$ s'obtient avec $x = (-b, a, 0)$. Ainsi

$$\text{Im } f_1 = \{(a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \quad y = (1, 1, 1) \notin \text{Im } f_1.$$

b) En soustrayant les coordonnées de $f_1(x)$ de celles de y , on obtient

$$y - f_1(x) = (1 - x_2 - x_3, 1, 1 + x_1 - x_3).$$

Donc

$$\|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1.$$

c) La quantité précédente est toujours au moins égale à 1. L'égalité a lieu si et seulement si $x_2 + x_3 = 1$ et $x_1 - x_3 + 1 = 0$, c'est-à-dire

$$x = (t - 1, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On peut choisir les valeurs $t = 0$ et $t = 1$, ce qui donne

$$x^* = (-1, 1, 0), \quad z^* = (0, 0, 1).$$

Ces deux vecteurs sont distincts, leurs images valent $(1, 0, 1)$, et leurs distances à y valent 1. Ainsi

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\| = 1, \quad \|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = 1.$$

Problème 2 – A. Nombres de Catalan

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. On étudie cette suite, une identité de convolution finie et la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour $|x| \leq 1/4$.

Corrigé – Problème 2 – A. Nombres de Catalan.

1. Premiers termes.

La définition donne

$$c_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 1, \quad c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1, \quad c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = 2.$$

Ainsi $\boxed{c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2.}$

2. Écriture comme différence de coefficients binomiaux.

a) Pour $n \geq 1$, le quotient des deux coefficients vaut

$$\frac{\binom{2n}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!n!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{n}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} = c_n.$$

En adoptant la convention $\binom{0}{1} = 0$, cette identité vaut aussi pour $n = 0$, où le membre de droite est $1 - 0 = c_0$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.}$$

b) Les coefficients binomiaux sont entiers, donc leur différence est un entier. La définition initiale donne aussi $c_n = \binom{2n}{n}/(n+1) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \in \mathbb{N}^* .}$$

3. Relation de récurrence.

Les termes étant non nuls, on peut calculer leur quotient :

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+2)(n+1)!^2} \frac{(n+1)n!^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.}$$

4. Calcul d'un terme en Python.

On initialise c à $c_0 = 1$, puis on applique la relation de la question 3. Après k étapes, la valeur calculée est c_k en arithmétique exacte.

```
def catalan(n):
    c = 1
    for k in range(n):
        c = 2*(2*k+1)*c/(k+2)
    return c
```

Ainsi

`catalan(n)` calcule c_n par récurrence.

Pour $n = 0$, la boucle est vide et la fonction renvoie bien 1. Les divisions sont effectuées en nombres flottants : pour de grands n , la valeur renvoyée peut être arrondie, même si c_n est mathématiquement entier.

5. Croissance et limite.

a) La question 3 donne

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} - 1 = \frac{2(2n+1) - (n+2)}{n+2} = \frac{3n}{n+2} \geq 0.$$

Comme $c_n > 0$, cela implique $c_{n+1} \geq c_n$. L'égalité vaut pour $n = 0$, et l'inégalité est stricte pour $n \geq 1$. Donc

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Supposons la suite majorée. Étant croissante, elle converge par le théorème de la limite monotone vers un réel ℓ . Comme $c_n \geq c_0 = 1$, on a $\ell \geq 1$. Mais $2(2n+1)/(n+2) \rightarrow 4$; en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = 4\ell$, donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\ell \geq 1$. La suite croissante n'est donc pas majorée, et

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

6. Encadrements quantitatifs des termes.

a) Pour $k \geq 1$, la relation de récurrence s'écrit

$$\frac{c_{k+1}}{4c_k} = \frac{2k+1}{2(k+2)}.$$

Tous les nombres comparés sont strictement positifs. L'inégalité inférieure demandée équivaut, après élévation au carré et multiplication par les dénominateurs positifs, à

$$4k^3(k+2)^2 \leq (2k+1)^2(k+1)^3.$$

Or le développement de la différence donne

$$(2k+1)^2(k+1)^3 - 4k^3(k+2)^2 = 9k^3 + 19k^2 + 7k + 1 > 0.$$

Cette première inégalité est donc démontrée. Pour la borne supérieure, les mêmes opérations donnent l'inégalité équivalente

$$(2k+1)^2(k+2) \leq 4(k+1)^3.$$

Cette fois,

$$4(k+1)^3 - (2k+1)^2(k+2) = 3k+2 > 0.$$

On a donc établi les deux bornes, avec leurs constantes :

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2} .}$$

- b) Pour $n \geq 2$, on multiplie les inégalités de a) pour $k = 1, \dots, n-1$. Les quotients c_{k+1}/c_k télescopent en $c_n/c_1 = c_n$; les deux autres produits télescopent également :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n}, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{2}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$4^{n-1} \frac{1}{n^{3/2}} \leq c_n \leq 4^{n-1} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{3/2}.$$

Cet encadrement vaut aussi pour $n = 1$, où les deux produits vides valent 1 et où les deux bornes sont $c_1 = 1$. Enfin,

$$4^{n-1} = \frac{1}{4} 4^n, \quad 4^{n-1} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{(n+1)^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n^{3/2}}.$$

On obtient exactement

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} .}$$

7. Identité de convolution finie.

- a) Dans la somme définissant T_n , posons $i = n - k$:

$$T_n = \sum_{i=0}^n (n-i) c_{n-i} c_i = n S_n - T_n.$$

Ainsi $2T_n = nS_n$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{n}{2} S_n .}$$

- b) En réunissant les deux sommes et en séparant le terme $k = 0$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k}.$$

La relation de la question 3, au rang $k-1$, donne

$$(k+1) c_k = 2(2k-1) c_{k-1}.$$

En posant $i = k-1$ dans la dernière somme, on obtient

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= c_{n+1} + \sum_{i=0}^n 2(2i+1) c_i c_{n-i} \\ &= c_{n+1} + 4T_n + 2S_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n .}$$

- c) Montrons $S_n = c_{n+1}$ par récurrence. Pour $n = 0$, $S_0 = c_0^2 = 1 = c_1$. Supposons $S_n = c_{n+1}$ à un rang $n \geq 0$. En utilisant a) dans l'identité b),

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n = (2n+3)c_{n+1}.$$

Ainsi

$$S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1} = c_{n+2},$$

la dernière égalité venant de la question 3 au rang $n+1$. L'hérédité est établie ; d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = c_{n+1}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

8. Somme de la série et équation vérifiée par g .

- a) Pour $|x| \leq 1/4$ et $n \geq 1$, la question 6 donne

$$|c_n x^n| \leq \frac{c_n}{4^n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n^{3/2}}.$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} n^{-3/2}$ converge ; par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge absolument. Ainsi

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad \sum_{n \geq 0} c_n x^n \text{ converge absolument.}$$

On note sa somme $f(x)$; sa continuité sur cet intervalle est admise par l'énoncé. On pose $g(x) = 2xf(x)$.

- b) Fixons $x \in [-1/4, 1/4]$ et posons $A_N(x) = \sum_{i=0}^N c_i x^i$. Le produit de deux sommes finies se regroupe selon $n = i + j$:

$$A_N(x)^2 = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=\max(0, n-N)}^{\min(n, N)} c_k c_{n-k} \right) x^n.$$

Pour $n \leq N$, la somme intérieure contient tous les indices $0 \leq k \leq n$ et vaut c_{n+1} par la question 7. On peut donc écrire

$$A_N(x)^2 = \sum_{n=0}^N c_{n+1} x^n + R_N(x),$$

où R_N regroupe les termes $N+1 \leq n \leq 2N$. Les coefficients c_k sont positifs ; pour ces derniers indices, la somme tronquée est au plus la somme complète c_{n+1} . Même si $x < 0$, l'inégalité triangulaire donne donc

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{2N} c_{n+1} |x|^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_{n+1} |x|^n \leq 2\sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

La dernière borne utilise la question 6 avec l'indice $n + 1$ et $|x|^n \leq 4^{-n}$. La décroissance de $t^{-3/2}$ donne, en sommant d'abord sur un nombre fini de segments puis en passant à la limite,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}} \leq \int_{N+1}^{+\infty} t^{-3/2} dt = \frac{2}{\sqrt{N+1}}.$$

Ainsi

$$|R_N(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{N+1}} \rightarrow 0.$$

La même comparaison assure la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 0} c_{n+1}x^n$, y compris aux deux extrémités. Enfin, $A_N(x) \rightarrow f(x)$, donc $A_N(x)^2 \rightarrow f(x)^2$. Le passage à la limite dans l'identité finie, avec ce reste contrôlé, donne

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

- c) En multipliant les sommes partielles de l'identité précédente par x , puis en prenant la limite,

$$xf(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = f(x) - c_0 = f(x) - 1.$$

Cette égalité vaut également en $x = 0$, puisque $f(0) = 1$. Avec $g(x) = 2xf(x)$, on obtient

$$g(x)^2 = 4x^2 f(x)^2 = 4x(f(x) - 1) = 2g(x) - 4x.$$

Ainsi

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad g(x)^2 = 2g(x) - 4x.$$

- d) L'égalité c) donne $(g(x) - 1)^2 = 1 - 4x$. Pour $x < 1/4$, le membre de droite est strictement positif ; on définit

$$\varepsilon(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x}} \in \{-1, 1\}.$$

Au point $x = 1/4$, l'égalité impose $g(1/4) = 1$; on choisit $\varepsilon(1/4) = -1$. On a ainsi construit une fonction sur tout l'intervalle telle que

$$g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1 - 4x}, \quad \varepsilon(x) \in \{-1, 1\}.$$

La continuité admise de f assure celle de $g = 2xf$. Sur $[-1/4, 1/4[$, le quotient définissant ε est celui de deux fonctions continues, avec dénominateur non nul. Donc

$$\varepsilon \text{ est continue sur } [-1/4, 1/4[.$$

- e) Puisque $g(0) = 0$, on a $\varepsilon(0) = -1$. Si ε prenait la valeur 1 en un autre point de $[-1/4, 1/4[$, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué au segment joignant ce point à 0, imposerait une valeur 0 entre -1 et 1, impossible puisque ε ne prend que ces deux valeurs. Ainsi $\varepsilon = -1$ sur cet intervalle. Au point $1/4$, $g(1/4) = 1 = 1 - \sqrt{1 - 4(1/4)}$. Finalement,

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

Problème 2 – B. Loi du demi-cercle

On définit $\varphi(x) = \sqrt{4-x^2}/(2\pi)$ sur $[-2, 2]$, et $\varphi(x) = 0$ ailleurs. On vérifie que cette fonction est une densité, puis on calcule les moments d'une variable X de densité φ .

Corrigé – Problème 2 – B. Loi du demi-cercle.**9. Calcul de l'intégrale.**

a) L'identité $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ donne

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

b) L'application $t \mapsto 2 \sin t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-2, 2]$. Sur cet intervalle, $\cos t \geq 0$, donc $\sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 \cos t$. Le changement de variable $x = 2 \sin t$, avec $dx = 2 \cos t \, dt$, donne

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 t \, dt = \boxed{1}.$$

Les fonctions sous les intégrales sont continues sur les segments concernés.

10. Vérification d'une densité.

La fonction φ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $[-2, 2]$, nulle en -2 et 2 , puis nulle à l'extérieur : elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1 d'après la question 9. Ainsi

$$\boxed{\varphi \text{ est une densité de probabilité.}}$$

11. Moments et nombres de Catalan.

a) Pour tout entier $m \geq 0$, la fonction $x \mapsto |x|^m \varphi(x)$ est continue sur $[-2, 2]$ et nulle ailleurs ; son intégrale converge. Par exemple, elle est majorée sur ce segment par $2^m \varphi(x)$, d'intégrale 2^m . Tous les moments de X existent donc et le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}(X^m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^m \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

Lorsque $m = 2n + 1$, la fonction sous l'intégrale est impaire. Lorsque $m = 2n$, elle est paire. On obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0, \quad \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} \, dx.}$$

b) On pose $u_n = \mathbb{E}(X^{2n})$.

i) Puisque $X^0 = 1$, on a $\boxed{u_0 = 1 = c_0}$.

ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$\pi u_{n+1} = \int_0^2 x^{2n+1} x \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

Pour cette intégration par parties sur le segment $[0, 2]$, on choisit les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} U(x) &= x^{2n+1}, & U'(x) &= (2n+1)x^{2n}, \\ V(x) &= -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}, & V'(x) &= x\sqrt{4-x^2}. \end{aligned}$$

La dérivée de V se prolonge continûment aux extrémités. Les produits $U(0)V(0)$ et $U(2)V(2)$ sont nuls. Il vient

$$\begin{aligned} \pi u_{n+1} &= \frac{2n+1}{3} \int_0^2 x^{2n} (4-x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{2n+1}{3} \left(4 \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^2 x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} dx \right). \end{aligned}$$

On divise par π pour obtenir

$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

iii) En regroupant les termes précédents,

$$(2n+4)u_{n+1} = 4(2n+1)u_n, \quad u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}u_n.$$

Cette relation est celle de la question A.3 pour c_n , et $u_0 = c_0$. Une récurrence donne donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^{2n}) = u_n = c_n.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) = c_1 = 1$.

Problème 2 – C. Premier retour à l'équilibre

Compter les suites de lancers par leur premier retour à l'équilibre conduit à la récurrence des nombres de Catalan. Les bornes établies dans la partie A permettent ensuite d'étudier l'espérance.

Corrigé – Problème 2 – C. Premier retour à l'équilibre.

On pose $q = 1 - p$ et on représente Pile par un déplacement $+1$, Face par un déplacement -1 . Après k lancers, l'écart entre le nombre de Pile et celui de Face est la somme de ces déplacements.

12. Simulation avec une borne de 10^4 lancers.

- a) On actualise l'écart après chaque lancer et on s'arrête dès qu'il redevient nul. Si aucun retour n'est observé dans la limite prescrite, on renvoie 0.

```
import numpy.random as rd

def simule(p):
    ecart = 0
    for k in range(1, 10001):
        if rd.random() < p:
            ecart = ecart + 1
        else:
            ecart = ecart - 1
        if ecart == 0:
            return k
    return 0
```

Le test d'égalité est effectué après un lancer : l'égalité initiale au temps 0 n'est donc pas comptée comme un retour. La boucle comporte au plus 10000 étapes et la fonction termine dans tous les cas.

- b) La première ligne affichée correspond à $p = 1/4$, la deuxième à $p = 1/2$ et la troisième à $p = 3/4$. Pour chaque valeur de p , le script calcule trois moyennes, chacune obtenue sur 1000 nouvelles simulations indépendantes. Précisément, la fonction simule la variable

$$T_{10000} = \begin{cases} T & \text{si } 1 \leq T \leq 10000, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les nombres affichés sont donc des moyennes empiriques de T_{10000} . Chacune de ces moyennes a pour espérance $\mathbb{E}(T_{10000})$, qui est finie puisque $0 \leq T_{10000} \leq 10000$. Pour $p = 1/4$ et $p = 3/4$, les valeurs sont relativement stables, proches de 1,5. Leur similitude est cohérente avec la symétrie de l'expérience lorsqu'on échange Pile et Face, donc p et $1 - p$. Pour $p = 1/2$, les moyennes sont beaucoup plus élevées et varient sensiblement entre les trois répétitions. Cela suggère que les retours peuvent être très tardifs ; la question 16 montrera que T n'a pas d'espérance finie dans ce cas. La borne de simulation doit être prise en compte : un retour après 10000 lancers est enregistré comme 0. Lorsque $\mathbb{E}(T)$ est finie, on a donc $\mathbb{E}(T_{10000}) \leq \mathbb{E}(T)$; la moyenne empirique est sans biais pour l'espérance de la variable simulée T_{10000} , mais peut sous-estimer l'espérance de T du fait de cette convention.

Trois moyennes empiriques de T_{10000}
pour chacun des $p = 1/4, 1/2, 3/4$.

13. Impossibilité d'un retour à un instant impair.

Si, après k lancers, les nombres de Pile et de Face sont égaux à un entier a , alors $k = a + a = 2a$ est pair. Le premier instant strictement positif où cela arrive est donc nécessairement pair. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2n + 1) = 0.$$

14. Comptage des suites de lancers.

- a) Une suite de D_n commence par Pile, car l'écart doit être strictement positif après le premier lancer. Elle se termine par Face, car elle revient à 0 au dernier lancer depuis un écart strictement positif, nécessairement égal à 1. Supprimons ce premier Pile et ce dernier Face. Il reste $2n - 2$ lancers, avec $n - 1$ Pile et $n - 1$ Face. À chaque instant de cette suite raccourcie, son écart est égal à l'écart de la suite initiale à l'instant correspondant, diminué de 1. Puisque les écarts initiaux avant le dernier lancer étaient des entiers strictement positifs, les nouveaux écarts sont positifs ou nuls. La suite raccourcie appartient donc à E_{n-1} . Réciproquement, en encadrant une suite de E_{n-1} par un Pile initial et un Face final, on obtient une suite de D_n : les écarts intermédiaires sont ceux de la suite initiale augmentés de 1, donc sont strictement positifs. Ces deux opérations sont réciproques. Pour $n = 1$, la suite raccourcie est la suite vide, comptée par $e_0 = 1$. On a donc une bijection, et

$$d_n = e_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

- b) i) Soit une suite de E_n . Son premier retour à un écart nul a lieu à un instant $2k$, avec $1 \leq k \leq n$. Avant cet instant, son écart est strictement positif : il est positif ou nul par définition de E_n , et ne peut être nul avant le premier retour. Le premier bloc de $2k$ lancers appartient donc à D_k . La suite restante, de longueur $2(n - k)$, part d'un écart nul, ne devient jamais négative et se termine à 0 ; elle appartient à E_{n-k} . Réciproquement, la concaténation d'une suite de D_k et d'une suite de E_{n-k} donne un élément de E_n dont le premier retour est $2k$. Les cas correspondant aux différents k sont disjoints. Pour k fixé, on a $d_k e_{n-k}$ concaténations possibles. Ainsi

$$e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k} \quad (n \geq 1).$$

- ii) En remplaçant n par $n + 1$ puis en utilisant $d_k = e_{k-1}$,

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} e_{n+1-k}.$$

Avec le changement d'indice $j = k - 1$, on obtient

$$e_{n+1} = \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j} \quad (n \geq 0).$$

- iii) On raisonne par récurrence. Initialement, $e_0 = 1 = c_0$. Si $e_j = c_j$ pour tous $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la récurrence précédente et la relation établie en A.7 donnent

$$e_{n+1} = \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j} = \sum_{j=0}^n c_j c_{n-j} = c_{n+1}.$$

La récurrence est donc établie, et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = c_n, \quad \forall n \geq 1, \quad d_n = c_{n-1}.}$$

- c) L'événement $[T = 2n]$ est constitué de deux types de suites : celles dont l'écart est strictement positif avant le dernier lancer, et celles dont l'écart est strictement négatif. En effet, l'écart ne peut changer de signe sans passer par 0, car ses déplacements valent $+1$ ou -1 ; or aucun retour n'a lieu avant $2n$. Le premier type compte d_n suites. L'échange de Pile et Face établit une bijection avec le second type, qui en compte donc aussi d_n . Chacune de ces $2d_n$ suites comporte n Pile et n Face. Par indépendance des lancers, elle a pour probabilité $p^n q^n$. Ces événements de suites sont disjoints ; en additionnant leurs probabilités,

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 2n) = 2d_n p^n q^n = 2c_{n-1} p^n (1-p)^n \quad (n \geq 1).}$$

15. La fonction G_T et la probabilité de non-retour.

- a) Pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 0$,

$$|\mathbb{P}(T = n)x^n| \leq \mathbb{P}(T = n).$$

La variable T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et la somme des probabilités de sa loi vaut 1. Par comparaison, la série qui définit $G_T(x)$ converge absolument. Ainsi

$$\boxed{G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n}$$

est bien définie pour $x \in [-1, 1]$.

Au terme $n = 0$, on prend $x^0 = 1$, y compris pour $x = 0$.

- b) En complétant le carré,

$$p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Le carré étant positif ou nul, et nul exactement lorsque $p = 1/2$,

$$\boxed{p(1-p) \leq \frac{1}{4}, \quad p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}.}$$

- c) Posons $r = p(1-p)$ et $z = rx^2$. On a $0 \leq z \leq 1/4$. Les probabilités aux instants impairs sont nulles et les probabilités aux instants pairs sont données par la question 14. Par un changement d'indice dans une série convergente,

$$\begin{aligned} G_T(x) - \mathbb{P}(T = 0) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} r^n x^{2n} \\ &= 2z \sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^m = 2zf(z) = g(z). \end{aligned}$$

Pour $z = 0$, les deux membres sont nuls également. On obtient donc

$$\boxed{G_T(x) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2).}$$

Les fonctions f et g utilisées ici sont celles définies par les sommes de la question A.8.

d) Puisque $G_T(1) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n) = 1$ et que A.8 donne $g(z) = 1 - \sqrt{1 - 4z}$,

$$1 = \mathbb{P}(T = 0) + 1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(T = 0) = \sqrt{(2p - 1)^2} = |2p - 1|.$$

Pour $p = 1/2$, cette probabilité est nulle :

$$p = \frac{1}{2} \implies \text{un premier retour à l'équilibre a lieu avec probabilité 1.}$$

Pour $p \neq 1/2$, il existe au contraire une probabilité strictement positive de ne jamais revenir à l'équilibre.

16. Existence ou divergence de l'espérance.

La variable T est positive ou nulle. Son espérance est finie exactement lorsque la série de termes $n\mathbb{P}(T = n)$ converge. D'après les questions 13 et 14, cette série se réduit à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n\mathbb{P}(T = 2n) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} nc_{n-1}(p(1-p))^n.$$

On utilise les bornes de A.6.b pour les indices $n - 1 \geq 1$, donc pour $n \geq 2$; le premier terme ne change pas la nature de la série.

a) Si $p \neq 1/2$, posons $\rho = 4p(1-p) \in]0, 1[$. La majoration de A.6.b donne, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 \leq 4nc_{n-1}(p(1-p))^n &\leq 4n \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \left(\frac{\rho}{4}\right)^n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n}{(n-1)^{3/2}} \rho^n \leq \sqrt{2} \rho^n. \end{aligned}$$

La dernière inégalité utilise $n/(n-1) \leq 2$ et $\sqrt{n-1} \geq 1$. La série géométrique $\sum_{n \geq 2} \rho^n$ converge, donc la série de l'espérance converge par comparaison. Ainsi

$$p \neq \frac{1}{2} \implies T \text{ admet une espérance finie.}$$

La valeur 0 attribuée au non-retour contribue pour 0 à cette espérance, conformément à la définition de T .

b) Si $p = 1/2$, alors $p(1-p) = 1/4$. La minoration de A.6.b donne, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 4nc_{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n &\geq 4n \frac{1}{4} \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{n}{4(n-1)^{3/2}} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

En effet, $n^{3/2} \geq (n-1)^{3/2}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 2} 1/\sqrt{n}$ diverge, car son exposant vaut $1/2 \leq 1$. La série de l'espérance diverge donc vers $+\infty$:

$$p = \frac{1}{2} \implies T \text{ n'admet pas d'espérance finie.}$$

Le retour a pourtant lieu avec probabilité 1, d'après la question 15. L'existence presque certaine d'un retour ne suffit donc pas à rendre son temps moyen fini.