

**Année :** 2022

**École :** EML

**Option :** Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

## Sommaire

|                                                                                                           |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Problème 1</b>                                                                                         | <b>1</b> |
| <i>Réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire . . . . .</i>                                  | <i>1</i> |
| <b>Problème 2</b>                                                                                         | <b>4</b> |
| <i>Suites ; séries ; intégrales ; variables à densité ; probabilités discrètes ;<br/>Python . . . . .</i> | <i>4</i> |

## Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

## Problème 1

Thèmes abordés : Réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

### Données

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , défini, pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

On confond les ensembles  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$ . Ainsi, en notant  $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ , on a  $\langle x, y \rangle = X^\top Y$ .

Pour tous réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , on note  $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Enfin, on rappelle qu'une matrice  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale lorsque  $P$  est inversible et  $P^{-1} = P^\top$ .

### Partie A — Mise en place d'un exemple

On considère les matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A^\top A.$$

1. a. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Déterminer le rang de  $A$ .

b. Calculer les matrices  $A^2$  et  $A^3$  et vérifier :

$$A^3 - A^2 + A = 0.$$

c. En déduire les valeurs propres réelles de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

2. a. Justifier que la matrice  $B$  est diagonalisable.

b. On pose

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

i. Vérifier que la matrice  $R$  est orthogonale.

ii. Montrer que la matrice  $R^\top B R$  est diagonale.

Dans toute la suite du problème,  $M$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on pose  $r = \text{rg}(M)$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M$ .

## Partie B — Valeurs singulières d'une matrice

On note  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M^\top$  et  $h = g \circ f$ .

3. Montrer :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$$

4. a. Soit  $x \in \ker(h)$ . En calculant  $\langle x, h(x) \rangle$ , montrer que  $x \in \ker(f)$ .  
 b. En déduire  $\ker(h) = \ker(f)$  puis  $\text{rg}(h) = r$ .
5. a. Justifier que l'endomorphisme  $h$  est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $h$ .  
 b. Montrer que les valeurs propres de  $h$  sont positives ou nulles.

On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}_1$ .

6. Justifier que  $P$  est orthogonale et montrer qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positifs ou nuls tels que

$$M^\top M = P D P^\top, \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  étant positifs ou nuls, on pose, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ . Les réels  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont appelés les **valeurs singulières** de la matrice  $M$ .

7. Dans cette question uniquement, on suppose que  $M$  est symétrique. Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de  $M$  en fonction de ses valeurs propres.
8. Justifier que  $D$  admet exactement  $r$  coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont non nuls et donc que  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  sont nuls.

9. a. Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , justifier que  $f(\varepsilon_i)$  est non nul et calculer  $\|f(\varepsilon_i)\|$ .  
 b. On pose, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$u_i = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i).$$

Montrer que  $(u_1, \dots, u_r)$  est une famille orthonormée.

- c. En déduire qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  au départ et la base  $\mathcal{B}_2$  à l'arrivée est

$$\text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On note  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_2$  et  $\Delta = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ .

10. Justifier que  $Q$  est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  au départ et la base  $\mathcal{B}_2$  à l'arrivée, montrer :

$$M = Q \Delta P^\top.$$

11. **Retour sur l'exemple.** Déterminer deux matrices orthogonales  $P_1$  et  $Q_1$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $\Delta_1$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$A = Q_1 \Delta_1 P_1^\top.$$

## Partie C — Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B. Il existe donc deux matrices orthogonales  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et des réels strictement positifs  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  tels que

$$M = Q\Delta P^T, \quad \Delta = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On définit la matrice  $M^+$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par

$$M^+ = P \text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right) Q^T.$$

La matrice  $M^+$  est appelée la **matrice pseudo-inverse** de  $M$ . On note  $f^+$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M^+$  et  $p = f \circ f^+$ .

**12.** Justifier que, si  $M$  est inversible, alors  $M^{-1} = M^+$ .

**13. a.** Simplifier le produit  $MM^+$ .

**b.** Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal.

**c.** Montrer  $\text{rg}(MM^+) = r$ , puis en déduire  $\text{Im}(p) = \text{Im}(f)$ .

**14. Application.** Soit  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Im}(f)$ . Il n'existe donc pas de vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x) = y$ . On cherche un vecteur  $x^*$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\|y - f(x^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|.$$

**a.** Justifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|.$$

**b.** Proposer un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  répondant au problème posé. Montrer que, lorsque  $r < n$ , il existe au moins deux vecteurs distincts de  $\mathbb{R}^n$  répondant au problème posé.

**15. Retour sur l'exemple.** On note  $f_1$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$  et on considère  $y = (1, 1, 1)$ .

**a.** Déterminer  $\text{Im}(f_1)$  et vérifier que  $y \notin \text{Im}(f_1)$ .

**b.** Montrer :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1.$$

**c.** En déduire deux vecteurs distincts  $x^*$  et  $z^*$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que

$$\|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

## Problème 2

Thèmes abordés : Suites ; séries ; intégrales ; variables à densité ; probabilités discrètes ;  
Python

### Données

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

Pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k \leq n$  :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $c_n$  le réel, appelé **nombre de Catalan d'ordre  $n$** , défini par

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

### Partie A — Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$ .

2. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

b. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n$  est un entier naturel non nul.

3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. Écrire une fonction Python d'en-tête `def catalan(n)` : qui, prenant en entrée un entier  $n \in \mathbb{N}$ , renvoie la valeur de  $c_n$ .

5. a. Montrer que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

6. a. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 4 \left( \frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left( \frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$$

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{n}{2} S_n.$$

On pourra effectuer le changement d'indice  $i = n - k$  dans la somme définissant  $T_n$ .

b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = c_{n+1}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

8. a. Montrer que, pour tout  $x \in [-1/4, 1/4]$ , la série  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$  converge.

On pose, pour tout  $x \in [-1/4, 1/4]$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = 2xf(x).$$

On admet que la fonction  $f$  est continue sur  $[-1/4, 1/4]$ .

b. Soit  $x \in [-1/4, 1/4]$ . En remarquant que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( \sum_{i=0}^N c_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^N c_j x^j \right) = \sum_{n=0}^{2N} \left( \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) x^n,$$

montrer :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

c. En déduire :

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad (g(x))^2 = 2g(x) - 4x.$$

d. Montrer qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $[-1/4, 1/4]$  et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  telle que

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que  $\varepsilon$  est continue sur  $[-1/4, 1/4[$ .

e. En déduire :

$$\forall x \in [-1/4, 1/4], \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

## Partie B — Loi du demi-cercle

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. a. Montrer :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

- b. En déduire, à l'aide du changement de variable  $x = 2 \sin(t)$ , la valeur de  $\int_{-2}^2 \varphi(x) dx$ .

10. Montrer que  $\varphi$  est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle  $X$  de densité  $\varphi$ , définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

11. a. Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

- b. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \mathbb{E}(X^{2n})$ .

i. Calculer  $u_0$ .

ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

iii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c_n.$$

## Partie C — Étude d'une expérience aléatoire

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité  $p$  et Face avec la probabilité  $1 - p$ , avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On définit la variable aléatoire  $T$  égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement P-P-F-P-F-F-P-F-..., alors  $T = 6$ .

12. a. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule(p):` qui prend en argument le réel  $p$ , simule au plus  $10^4$  lancers de la pièce et renvoie la valeur de  $T$ , en convenant que si, sur les  $10^4$  lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors  $T$  prend la valeur 0.

- b. On exécute le script Python suivant :

```
for i in range(1, 4):
    L = [0.0] * 3
    for j in range(3):
        m = 0
        for k in range(1000):
            m = m + simule(i / 4)
        L[j] = m / 1000
print(L)
```

et on obtient les résultats suivants :

|         |        |         |
|---------|--------|---------|
| 1.392   | 1.478  | 1.410   |
| 100.572 | 71.172 | 125.280 |
| 1.454   | 1.544  | 1.414   |

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

**13.** Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2n + 1) = 0.$$

**14.** On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D_n$  l'ensemble des résultats possibles de  $2n$  lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du  $2n$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des  $2n - 1$  premiers lancers ;

et on pose  $d_n = \text{Card}(D_n)$ .

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_n$  l'ensemble des résultats possibles de  $2n$  lancers pour lesquels :

- à l'issue du  $2n$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des  $2n - 1$  premiers lancers ;

et on pose  $e_0 = 1$  et  $e_n = \text{Card}(E_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par exemple,

$$D_3 = \{\text{P-P-P-F-F-F}, \text{P-P-F-P-F-F}\}$$

et

$$E_3 = \{\text{P-F-P-F-P-F}, \text{P-F-P-P-F-F}, \text{P-P-F-F-P-F}, \\ \text{P-P-F-P-F-F}, \text{P-P-P-F-F-F}\},$$

ainsi  $d_3 = 3$  et  $e_3 = 5$ .

**a.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que tout résultat de  $D_n$  commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier  $d_n = e_{n-1}$ .

**b. i.** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

**ii.** En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}.$$

**iii.** Montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = c_n,$$

où  $c_n$  est le nombre de Catalan d'ordre  $n$ .

**c.** En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = 2n) = 2c_{n-1}p^n(1-p)^n.$$

- 15.** a. Montrer que, pour tout  $x \in [-1, 1]$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n)x^n$  converge.  
On pose, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n.$$

- b. Montrer :

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left( p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2} \right).$$

- c. Montrer :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad G_T(x) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2),$$

où  $g$  est la fonction définie dans la question A.8.

- d. En utilisant la valeur de  $G_T(1)$ , montrer :

$$\mathbb{P}(T = 0) = |2p - 1|.$$

Interpréter ce résultat lorsque  $p = \frac{1}{2}$ .

- 16.** En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

- a. si  $p \neq \frac{1}{2}$ , alors la variable aléatoire  $T$  admet une espérance ;
- b. si  $p = \frac{1}{2}$ , alors la variable aléatoire  $T$  n'admet pas d'espérance.