

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2022

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Endomorphismes cycliques et décomposition de Frobenius	2
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; Python.</i>	2
2	Deux cas particuliers	4
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; intégrales généralisées.</i>	4
3	Décomposition de Frobenius et applications	5
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction.</i>	5

1 Endomorphismes cycliques et décomposition de Frobenius

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; Python.

Ce problème étudie des propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel réel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un endomorphisme de E . Dans tout le problème, $n \geq 2$, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble de ses endomorphismes. Une homothétie est une application de la forme λId_E , avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$. On note $u|_F$ l'endomorphisme de F induit par u . Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour $k \geq 1$, $u^k = u \circ u^{k-1}$. Pour $e \in E$, on pose

$$E_u(e) = \text{Vect}(u^k(e) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket), \quad B(e, k) = (e, u(e), \dots, u^{k-1}(e)) \quad (k \geq 1).$$

L'endomorphisme u est dit *cyclique* s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; en dimension 1, tout endomorphisme est considéré comme cyclique. Une matrice compagnon (ou de Frobenius) est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$. Enfin, u est nilpotent s'il existe $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$; le plus petit tel entier est son indice de nilpotence.

Section A – Étude des sous-espaces $E_u(e)$

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e \in E \setminus \{0\}$.

1. Justifier que la famille $B(e, n+1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\}$. Justifier l'existence de $d(e)$.
3. Montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{d(e)-1} \in \mathbb{R}$ tels que $u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$. Montrer alors que, pour tout $k \geq d(e)$, $u^k(e)$ est une combinaison linéaire de $e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e)$. En déduire que $B(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.
4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par u . Montrer également que tout sous-espace vectoriel de E contenant e et stable par u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $d(e)$ le vecteur e est-il propre pour u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tout vecteur non nul e de E , on a $d(e) = 1$.
7. Montrer que u est cyclique si et seulement s'il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) = n$.

Section B – Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose que u est cyclique et qu'il existe donc $e \neq 0$ tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $B(e, n)$. Vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. Avec $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$, que vaut $P_A(u)(e)$? Calculer $P_A(u)(u^k(e))$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, puis montrer que P_A est un polynôme annulateur de u .

10. Vérifier que $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A , et vérifier que le sous-espace propre associé est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation, portant sur P_A , pour que u soit diagonalisable.

Section C – Un premier exemple

On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_3$ sa base canonique. Les endomorphismes f et g ont respectivement pour matrices dans $\mathcal{B}_3$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Justifier que f est diagonalisable. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ses valeurs propres.
15. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de diagonalisation de f telle que $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée de V_i dans $\mathcal{B}_3$ soit 1.
16. Posant $V = V_1 + V_2 + V_3$, déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal. L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g .

Section D – Avec Python

Dans cette section, les polynômes sont à coefficients réels. On étudie deux méthodes indépendantes permettant d'implémenter en Python la caractérisation de la question 13. Les questions 22 et suivantes sont indépendantes des précédentes. On pourra utiliser `numpy.poly1d` pour représenter un polynôme, `p(x)` pour l'évaluer, `p.order` pour son degré et `p.deriv()` pour sa dérivée. Les fonctions `max`, `sum` et `abs` ont leur sens usuel.

19. Soient P et Q deux polynômes réels non nuls. Montrer qu'il existe un diviseur commun Δ à P et Q , de degré maximal et unitaire. Un tel polynôme est appelé un *pgcd* de P et Q . On pourra utiliser `numpy.polynomial.polynomial.polydiv` pour mettre en œuvre l'algorithme d'Euclide.
20. Le résultat suivant, faisant intervenir des racines complexes, est admis. Un polynôme réel P de degré au moins 2 admet une racine multiple si et seulement si un pgcd de P et de P' est de degré au moins 1.
21. Compléter la fonction Python `rac_simp` qui, appliquée à une liste `c` représentant les coefficients d'un polynôme P , renvoie `True` ou `False` selon que P n'a que des racines simples ou non. Comment l'utiliser pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ?

```
def rac_simp(c):
    # a completer
    return ...
```

22. Justifier que si un polynôme P de degré n possède $n+1$ réels $x_1 < \dots < x_{n+1}$ tels que $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors P admet n racines réelles distinctes.
23. Montrer que si $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et si $P(z) = 0$, alors $|z| \leq \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$. On note m ce maximum.

24. Compléter la fonction Python `rac_simp_approx` qui, appliquée à la liste `c` des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ et à un réel `pas`, renvoie `True` si elle détecte n changements de signe en partant de $m - \text{pas}/2$ et en testant de `pas` en `pas` jusqu'à dépasser $m + \text{pas}/2$. Sinon, elle renvoie `'ind'`.

```
def rac_simp_approx(c, pas):
    # a compléter
    return ...
```

25. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ? Expliquer dans quel(s) cas elle renvoie `'ind'`.

2 Deux cas particuliers

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; intégrales généralisées.

Section A – Endomorphismes diagonalisables cycliques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

27. En considérant l'action sur une base de vecteurs propres, établir que $(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{Id}_E) = 0$. En déduire que $(\text{Id}_E, u, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.
28. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?

On suppose désormais $p = n$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

29. Pour $e = \sum_{i=1}^n e_i$, montrer que $B(e, n)$ est libre et conclure que u est cyclique.
30. Reprendre l'exemple de la section C et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, poser $u_\alpha = g + \alpha f$. Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, selon α , les cas où u_α est cyclique.

Section B – Endomorphismes nilpotents cycliques

Dans cette section, u est nilpotent d'indice r .

31. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. Montrer que $(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ est libre.
32. En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique. Dans ce cas, écrire la matrice de u dans la base $B(e, n)$.

Section C – Un second exemple

Soit E l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $X^k : x \mapsto x^k$ et (X^k) est une base de E . Pour $P \in E$, on définit $u(P)$ par

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt.$$

33. Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale ci-dessus converge et que $u(P)$ appartient à E .
34. Vérifier que u est un endomorphisme de E .
35. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$.
36. En déduire que $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$.
37. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s} ds$.

38. Montrer que $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s} ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que $(u(P))' = u(P) - P = u(P')$.
39. Déterminer la matrice de u dans la base $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ et en déduire le spectre de u .
40. En posant $v = u - \text{Id}_E$, montrer que $\text{Im}(v)$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 2$.
41. Montrer que v est nilpotent. Est-il cyclique ?

3 Décomposition de Frobenius et applications

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction.

On veut démontrer la propriété (R) : il existe $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et des sous-espaces non nuls $F_1, \dots, F_p$, stables par u , tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ et que chaque $u|_{F_i}$ soit cyclique.

Section A – Cas d'une homothétie

42. Démontrer que (R) est réalisée si u est une homothétie.

Section B – Cas où u n'est pas une homothétie

43. Justifier qu'il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) \neq 1$.

On choisit $e \neq 0$ tel que $d = d(e)$ soit maximal, on pose $e_k = u^k(e)$ pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $F_1 = E_u(e)$, et $u^d(e) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e)$.

44. Justifier que (R) est réalisée si $d = n$.

On suppose $d \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et on complète $B(e, d)$ en une base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{d-1}, e_d, \dots, e_{n-1})$ de E .

45. Démontrer que $\varphi : \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \mapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle. Pour $x \in E$, poser $\Phi(x) = (\varphi(u^{d-1}(x)), \dots, \varphi(u(x)), \varphi(x)) \in \mathbb{R}^d$.
46. Vérifier que Φ est linéaire. On note $G = \ker \Phi$ et $\tilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1 .
47. Calculer $\Phi(e_0)$ et $\Phi(e_1)$. Plus généralement, justifier que, pour $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, il existe $(\beta_{0,k}, \dots, \beta_{k-1,k})$ tel que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \dots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \dots, 0)$.
48. Écrire la matrice de $\tilde{\Phi}$ dans les bases $B(e, d)$ et canonique de $\mathbb{R}^d$, puis justifier que $\tilde{\Phi}$ est bijective.
49. Montrer que $E = F_1 \oplus G$ et que G est stable par u .
50. Dire pourquoi $u|_{F_1}$ est cyclique.
51. Justifier que, pour tout $e' \in G \setminus \{0\}$, $d(e') \leq d$.
52. Démontrer la propriété (R).

Section C – Première application : endomorphismes nilpotents

53. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces non nuls stables par u , tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Pour une base $\mathcal{B}_{F_k}$ de chaque F_k , quelle est la forme de la matrice de u dans la base obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_{F_k}$?

Dans la suite, u est nilpotent d'indice p .

54. Montrer, grâce à (R) , qu'il existe une base dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})$ de u est triangulaire inférieure, avec $t_{i,i} = 0$, $t_{i,i-1} \in \{0, 1\}$ pour $i \geq 2$, et tous les autres coefficients nuls.

Section D – Deuxième application : une matrice est semblable à sa transposée

On suppose $E = \mathbb{R}^n$, de base canonique $\mathcal{B}_n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé. On veut établir la propriété (S) : il existe deux matrices symétriques $V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible, telles que $M = VW$.

55. Cas où u est cyclique. Soient e tel que $E = E_u(e)$ et $A = M_{B(e,n)}(u)$, matrice de Frobenius associée aux $a_0, \dots, a_{n-1}$. On considère la matrice symétrique S définie par $S_{i,j} = -a_{i+j-1}$ si $i+j \leq n$, par $S_{i,j} = 1$ si $i+j = n+1$, et par $S_{i,j} = 0$ sinon. En posant f l'endomorphisme de matrice S dans $B(e,n)$, calculer $u(f(e))$, $u(f(u(e)))$, puis $u(f(u^j(e)))$ pour $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, ainsi que $u(f(u^{n-1}(e)))$. En déduire que $AS = S_1$, où S_1 est la matrice symétrique définie par $(S_1)_{1,1} = a_0$, $(S_1)_{1,j} = (S_1)_{j,1} = 0$ pour $j \geq 2$, et, pour $i, j \geq 2$, par $(S_1)_{i,j} = -a_{i+j-2}$ si $i+j \leq n+1$, par $(S_1)_{i,j} = 1$ si $i+j = n+2$, et par $(S_1)_{i,j} = 0$ sinon.
57. Justifier que S est inversible. En notant $S_2 = S^{-1}$, montrer que $A = S_1 S_2$, où S_1 et S_2 sont symétriques.
58. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_n$ vers $B(e,n)$, vérifier que $M = P S_1 {}^t P ({}^t P)^{-1} S_2 P^{-1}$ et conclure que M vérifie (S) .
59. Montrer que ${}^t M$ et M sont semblables ; déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^t M = Q^{-1} M Q$.
60. Cas général. En s'appuyant sur le cas précédent et sur (R) , montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et ${}^t M$ sont semblables.