Ecricome

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2023

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Produits de matrices et commutant

La première partie compare les spectres de AB et BA, pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dans la seconde partie, A possède n valeurs propres réelles deux à deux distinctes ; on étudie les matrices qui commutent avec A.

Corrigé – Exercice 1 – Produits de matrices et commutant.

Partie 1.

1. Un exemple en dimension deux.

a) Le produit matriciel donne

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

b) Pour un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'égalité $ABX = \lambda X$ équivaut au système

$$(2-\lambda)x + 3y = 0, \qquad (-1-\lambda)y = 0.$$

Si $y = 0$, alors $x \neq 0$ et $\lambda = 2$. Si $y \neq 0$, alors $\lambda = -1$, puis $x = -y$. Ces deux valeurs sont effectivement obtenues, et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(AB) = \{-1, 2\}, \quad E_2(AB) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-1}(AB) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

De même, $BAX = \lambda X$ équivaut à

$$(-1-\lambda)x + 3y = 0, \qquad (2-\lambda)y = 0.$$

Si $y = 0$, on obtient $\lambda = -1$; si $y \neq 0$, on obtient $\lambda = 2$ et $x = y$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(BA) = \{-1, 2\}, \quad E_2(BA) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1}(BA) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

2. Transmission d'une valeur propre non nulle.

On suppose désormais $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ quelconques. Soit $X \neq 0$ tel que $ABX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$.

a) Si $BX = 0$, alors $ABX = A0 = 0$, donc $\lambda X = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{BX \neq 0.}$$

b) Par associativité du produit matriciel,

$$BA(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

Le vecteur BX étant non nul,

$$\boxed{BX \in E_\lambda(BA) \setminus \{0\}, \qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(BA).}$$

3. Transmission de la valeur propre nulle.

On suppose que $X \neq 0$ et $ABX = 0$.

a) Si B est inversible, $BX = 0$ entraînerait $X = B^{-1}0 = 0$. On a donc $BX \neq 0$, et

$$BA(BX) = B(ABX) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{BX \neq 0, \qquad BX \in \mathrm{Ker}(BA), \qquad 0 \in \mathrm{Sp}(BA).}$$

b) Si B n'est pas inversible, son rang est strictement inférieur à n. De plus, tout vecteur de $\mathrm{Im}(BA)$ est de la forme $B(AX)$ et appartient donc à $\mathrm{Im}(B)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{rg}(BA) \leq \mathrm{rg}(B) < n.}$$

Le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}(BA) = n - \mathrm{rg}(BA) > 0$. Il existe donc un vecteur non nul Y vérifiant $BAY = 0$, d'où

$$\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(BA).}$$

4. Égalité des spectres.

Les questions 2 et 3 traitent respectivement les valeurs propres non nulles et la valeur propre nulle ; elles donnent $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathrm{Sp}(BA)$. Le raisonnement s'applique aussi aux matrices B, A prises dans cet ordre et donne l'inclusion réciproque. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA).}$$

5. Comparaison des sous-espaces propres.

L'égalité des spectres ne force pas celle des sous-espaces propres. Dans l'exemple de la question 1,

$$E_2(AB) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = E_2(BA).$$

On a donc un contre-exemple explicite :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ n'ont pas nécessairement les mêmes sous-espaces propres.}}$$

Corrigé – Exercice 1 – Partie 2. Matrices commutantes.

Partie 2. On suppose ici que A admet les n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, deux à deux distinctes, et que $AB = BA$.

6. Indépendance des puissances de A.

a) Sous l'hypothèse de la question, posons

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k.$$

Les coefficients ne sont pas tous nuls, donc $Q \neq 0$, son degré est au plus $n-1$, et la relation supposée donne

$$\boxed{Q \neq 0, \qquad \deg Q \leq n-1, \qquad Q(A) = 0.}$$

b) Pour chaque i, choisissons un vecteur propre non nul X_i associé à λ_i. Par récurrence, $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$ pour tout $k \geq 0$: la formule vaut pour $k = 0$, et la multiplication par A assure l'hérédité. Par conséquent,

$$0 = Q(A)X_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k X_i = Q(\lambda_i) X_i.$$

Comme $X_i \neq 0$, on a $Q(\lambda_i) = 0$ pour chaque i. Le polynôme non nul Q possède donc n racines distinctes, alors que son degré est au plus $n-1$, ce qui est impossible. Ainsi,

$$\boxed{\text{La relation supposée avec des coefficients non tous nuls est impossible.}}$$

Ce raisonnement inclut $n = 1$: un polynôme constant non nul n'a aucune racine.

c) Toute relation linéaire entre $I_n, A, \dots, A^{n-1}$ a donc tous ses coefficients nuls. Ainsi,

$$\boxed{(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \text{ est une famille libre.}}$$

7. Stabilité d'un sous-espace propre de A par B.

Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.

a) Choisissons un vecteur propre non nul X_i pour chacune des n valeurs propres distinctes de A. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre ; les n vecteurs $X_1, \dots, X_n$ constituent donc une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $Y = \sum_i y_i X_i$ vérifie $AY = \lambda Y$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda) y_i X_i = 0.$$

La liberté donne $(\lambda_i - \lambda) y_i = 0$ pour chaque i. Puisque X est non nul, λ est égal à l'un des λ_i, noté λ_j, et seul le coefficient y_j peut être non nul. Il en résulte que $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X_j)$. Comme X est un vecteur non nul de cette droite,

$$\boxed{E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X), \qquad \dim E_\lambda(A) = 1.}$$

b) D'une part, $AX = \lambda X$ donne $BAX = \lambda BX$. D'autre part, $BA = AB$ donne $BAX = ABX$. Ainsi,

$$\boxed{BAX = \lambda BX = A(BX).}$$

c) L'égalité précédente montre que $A(BX) = \lambda BX$, y compris lorsque $BX = 0$. Donc BX appartient à $E_\lambda(A)$ et, par la question 7.a,

$$\boxed{BX \in \mathrm{Vect}(X).}$$

8. Vecteurs propres communs.

Pour tout vecteur propre X de A, la question 7 donne un réel μ tel que $BX = \mu X$. Comme $X \neq 0$, cela signifie que X est un vecteur propre de B, y compris lorsque $\mu = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Tout vecteur propre de } A \text{ est un vecteur propre de } B.}$$

9. Base commune et spectre du produit.

a) Pour chaque i, choisissons $X_i \neq 0$ vérifiant $AX_i = \lambda_i X_i$. La famille est libre par distinction des valeurs propres de A, puis constitue une base puisque sa longueur est n. La question 8 assure que chacun de ses vecteurs est également propre pour B. Ainsi,

$$\boxed{(X_1, \dots, X_n) \text{ est une base commune de vecteurs propres,} \qquad AX_i = \lambda_i X_i.}$$

b) En écrivant $BX_i = \mu_i X_i$, on obtient

$$ABX_i = A(\mu_i X_i) = \lambda_i \mu_i X_i.$$

Les X_i sont non nuls, donc les $\lambda_i \mu_i$ sont des valeurs propres de AB. Réciproquement, si $Y = \sum_i y_i X_i \neq 0$ et $ABY = \nu Y$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \mu_i - \nu) y_i X_i = 0.$$

La liberté donne $(\lambda_i \mu_i - \nu) y_i = 0$ pour chaque i. Au moins un y_j est non nul ; il impose $\nu = \lambda_j \mu_j$. On a donc exactement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i \mid 1 \leq i \leq n\}.}$$

Certains de ces produits peuvent être égaux : l'accolade décrit l'ensemble des valeurs obtenues, sans supposer leur distinction.

10. Interpolation polynomiale et expression de B.

a) Notons

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad P \longmapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

La linéarité résulte de la linéarité de l'évaluation en chaque λ_i : pour des polynômes P, Q et des réels a, b, $\mathcal{L}(aP + bQ) = a\mathcal{L}(P) + b\mathcal{L}(Q)$. Si $P \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{L}$, alors $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i. Le résultat rappelé dans l'énoncé impose $P = 0$. L'application est donc injective. Enfin, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ ont la même dimension n ; une application linéaire injective entre ces espaces est bijective. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est un isomorphisme.}}$$

b) La bijectivité donne un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\mathcal{L}(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Les égalités $P(\lambda_i) = \mu_i$ entraînent $P(\lambda_i)X_i = BX_i$. Réciproquement, puisque $X_i \neq 0$, toute égalité $P(\lambda_i)X_i = BX_i = \mu_i X_i$ entraîne $P(\lambda_i) = \mu_i$. L'unicité fournie par $\mathcal{L}$ est donc précisément celle demandée :

$$\boxed{\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ BX_i = P(\lambda_i)X_i.}$$

c) Comme à la question 6, on a $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$. Il en résulte que

$$P(A)X_i = P(\lambda_i)X_i = BX_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Les applications linéaires représentées par $P(A)$ et B coïncident sur la base $(X_1, \dots, X_n)$; elles coïncident donc sur tout $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{B = P(A).}$$

11. Description et dimension du commutant.

a) La matrice nulle commute avec A, donc $0 \in \mathcal{C}(A)$. Si $B, C \in \mathcal{C}(A)$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la distributivité donne

$$A(aB + bC) = aAB + bAC = aBA + bCA = (aB + bC)A.$$

Ainsi, $\mathcal{C}(A)$ est non vide et stable par combinaison linéaire ; par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_n(\mathbb{R}).}$$

b) Si $B \in \mathcal{C}(A)$, le raisonnement des questions 7 à 10 s'applique à cette matrice et donne $B = P(A)$ pour un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, pour tout $k \geq 0$, $AA^k = A^k A = A^{k+1}$. Toute combinaison linéaire des puissances de A commute donc avec A, en particulier toute matrice $P(A)$. Les deux inclusions sont établies, d'où

$$\boxed{\mathcal{C}(A) = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}).}$$

c) La famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ engendre $\mathcal{C}(A)$ par la question 11.b, et elle est libre par la question 6. Elle est donc une base, composée de n matrices :

$$\boxed{(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{C}(A), \qquad \dim \mathcal{C}(A) = n.}$$

Exercice 2 – Minimum d'une fonction quadratique

Endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives, minimum global d'une fonction quadratique et convergence d'une descente de gradient.

Corrigé – Exercice 2 – Minimum d'une fonction quadratique.

1. Inversibilité de f.

Toutes les valeurs propres de f sont strictement positives, donc 0 n'est pas une valeur propre. Si le noyau de f contenait un vecteur non nul x, l'égalité $f(x) = 0$ montrerait que 0 est une valeur propre. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, et f est injective. Une application linéaire injective d'un espace de dimension finie dans lui-même est bijective. Par conséquent,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

2. Symétrie et encadrement de la forme quadratique.

a) Par définition, un endomorphisme f de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est symétrique si

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.}$$

b) La base canonique est orthonormale pour le produit scalaire usuel. La symétrie de l'endomorphisme équivaut donc à celle de sa matrice dans cette base :

$$\boxed{{}^tA = A.}$$

c) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de f. En ordonnant ces vecteurs suivant les valeurs propres de l'énoncé, on a $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des e_i dans la base canonique. Alors P est orthogonale : ${}^tPP = I_n$, donc $P^{-1} = {}^tP$. Le changement de base donne

$$\boxed{{}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \qquad P^{-1} = {}^tP.}$$

d) Écrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans cette base orthonormale. Alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad \langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Comme $\lambda_1 \le \lambda_i \le \lambda_n$ et $x_i^2 \ge 0$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 \|x\|^2 \le \langle f(x), x\rangle \le \lambda_n \|x\|^2.}$$

e) Si $\langle f(x), x\rangle = 0$, la première inégalité et $\lambda_1 > 0$ donnent $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$. Réciproquement, $f(0) = 0$, et le produit scalaire est nul pour $x = 0$. Ainsi

$$\boxed{\langle f(x), x\rangle = 0 \iff x = 0.}$$

3. Expression et gradient de g.

a) Dans la base canonique, $f(x)$ a pour i-ième coordonnée $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Ainsi

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j - \sum_{i=1}^n u_i x_i.}$$

b) Cette expression est un polynôme en les n coordonnées de x. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, en particulier de classe $\mathcal{C}^1$. En dérivant par rapport à x_1, on obtient

$$\partial_1 g(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}x_i\right) - u_1.$$

Comme $a_{i,1} = a_{1,i}$,

$$\boxed{\partial_1 g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j - u_1.}$$

c) Le même calcul pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$ donne

$$\partial_k g(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}x_i\right) - u_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - u_k.$$

Ce sont exactement les coordonnées du vecteur $f(x) - u$, donc

$$\boxed{\nabla g(x) = f(x) - u.}$$

4. Unique point critique.

Un point critique est un vecteur x tel que $\nabla g(x) = 0$. La question 3 donne

$$\nabla g(x) = 0 \iff f(x) = u \iff x = f^{-1}(u),$$

la dernière équivalence résultant de l'inversibilité de f. Ainsi

$$\boxed{g \text{ admet un unique point critique } m = f^{-1}(u).}$$

5. Complétion de la forme quadratique.

On a $f(m) = u$ et

$$g(m) = \frac{1}{2}\langle u, m\rangle - \langle u, m\rangle = -\frac{1}{2}\langle u, m\rangle.$$

La linéarité et la symétrie de f donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle &= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle f(m), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) - g(m) = \frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle.}$$

6. Nature du point critique.

La question 2 d), appliquée à $x - m$, entraîne

$$g(x) - g(m) \geq \frac{\lambda_1}{2}\|x - m\|^2 \geq 0.$$

Pour $x \neq m$, la première borne est strictement positive. Ainsi

$$\boxed{m \text{ est l'unique point de minimum global de } g,} \qquad \boxed{x \neq m \implies g(x) > g(m).}$$

Corrigé – Exercice 2 – Descente de gradient.

On suppose désormais $0 < \alpha < 1/\lambda_n$ et $m_{p+1} = m_p - \alpha\nabla g(m_p)$. Dans l'énoncé adapté, les lettres des sous-questions recommencent à a) au milieu des questions 9 et 10. On les renumérote ici sans interruption : 9 a), b), c) et 10 a), b), c), d).

7. Identité exacte pour un accroissement de g.

a) Pour $a, h \in \mathbb{R}^n$, la bilinéarité et la linéarité de f donnent

$$\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(h), a\rangle + \langle f(h), h\rangle.$$

La symétrie implique $\langle f(h), a\rangle = \langle h, f(a)\rangle = \langle f(a), h\rangle$. Ainsi

$$\boxed{\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle.}$$

b) En substituant cette égalité dans la définition de g,

$$\begin{aligned} g(a+h) &= g(a) + \langle f(a), h\rangle - \langle u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle \\ &= g(a) + \langle f(a) - u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle. \end{aligned}$$

La question 3 c) permet de conclure que

$$\boxed{g(a+h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle.}$$

8. Décroissance des valeurs de g au fil des itérations.

a) Prenons $a = m_p$ et $h = -\alpha\nabla g(m_p)$. Alors $a + h = m_{p+1}$, et la linéarité de f entraîne

$$\langle f(h), h\rangle = \alpha^2 \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle.$$

La question 7 b) donne donc

$$\boxed{\begin{aligned} g(m_{p+1}) = g(m_p) &- \alpha\|\nabla g(m_p)\|^2 \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle. \end{aligned}}$$

b) La borne supérieure de la question 2 d), appliquée au vecteur $\nabla g(m_p)$, donne

$$\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle \leq \lambda_n \|\nabla g(m_p)\|^2.$$

D'où

$$\boxed{g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha\left(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\|\nabla g(m_p)\|^2.}$$

9. Convergence des valeurs et des points.

a) L'hypothèse $0 < \alpha < 1/\lambda_n$ assure $1 - \alpha\lambda_n/2 > 1/2 > 0$. La question 8 montre donc que la suite $(g(m_p))$ est décroissante. Elle est minorée par $g(m)$, puisque m est un point de minimum global. Par le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{(g(m_p)) \text{ converge vers un réel supérieur ou égal à } g(m).}$$

Pour les deux questions suivantes, on utilise l'admission de l'énoncé : cette limite est exactement $g(m)$.

b) Les questions 5 et 2 d) donnent

$$g(m_p) - g(m) = \frac{1}{2}\langle f(m_p - m), m_p - m\rangle \geq \frac{\lambda_1}{2}\|m_p - m\|^2.$$

Comme $\lambda_1 > 0$, on en déduit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m)).}$$

c) Le membre de droite tend vers 0 d'après l'admission. Par encadrement, $\|m_p - m\|^2 \to 0$; puis, par continuité de la racine carrée sur $[0, +\infty[$,

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \|m_p - m\| = 0.}$$

10. Étude du cas de dimension 2 et examen des figures.

a) L'application $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$ est linéaire et a pour matrice dans la base canonique

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Cette matrice est symétrique ; la base canonique étant orthonormale, f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$. On a aussi

$$f(1, -1) = (1, -1), \qquad f(1, 1) = 3(1, 1).$$

Les vecteurs $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont indépendants et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent,

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3.}$$

b) La condition sur le paramètre est ici $0 < \alpha < 1/3$. Ainsi $\alpha_0 = 0{,}2$ vérifie les hypothèses, tandis que $\alpha_1 = 0{,}67$ ne les vérifie pas :

$$\boxed{\alpha_0 = 0{,}2 \in]0, 1/3[, \qquad \alpha_1 = 0{,}67 \notin]0, 1/3[.}$$

Les résultats précédents prévoient, pour α_0, une décroissance de $g(m_p)$ vers son minimum et une convergence des points m_p vers m. Pour α_1, ces conclusions ne résultent plus des hypothèses ; le calcul de la question d) explique la divergence observée pour des points initiaux ayant une composante non nulle dans la direction $(1, 1)$ après soustraction de m.

Les coordonnées et valeurs portées dans la figure adaptée présentent toutefois des incohérences numériques. Elles ne peuvent donc pas être toutes retenues comme des réalisations de la récurrence de l'énoncé ; on les vérifie explicitement en d).

c) Le point de convergence suggéré pour les itérations admissibles, à coordonnées entières, est

$$\boxed{m = (1, 0).}$$

d) On a $f(1, 0) = (2, 1) = u$, donc l'unique point critique est effectivement $m = (1, 0)$. Dans ce cas,

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y, \qquad g(1, 0) = -1.$$

Par les questions 5 et 6,

$$\boxed{m = (1,0), \qquad g(m) = -1, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) \geq -1.}$$

L'endomorphisme est symétrique et ses deux valeurs propres sont strictement positives. Pour $\alpha_0 = 0{,}2$, toutes les hypothèses de l'exercice sont donc vérifiées, et l'on doit avoir $m_p \to (1,0)$ et $g(m_p) \downarrow -1$.

Vérification exacte des données de la figure. La courbe adaptée pour α_0 comporte des valeurs inférieures à -1, notamment $-1{,}14$. Elles sont impossibles puisque -1 est le minimum global. De plus, pour le point initial $m_0 = (-1,-1)$ affiché dans cette trajectoire, la récurrence donne

$$\nabla g(m_0) = f(-1,-1) - (2,1) = (-5,-4),$$

$$m_1 = (-1,-1) - 0{,}2(-5,-4) = (0,-0{,}2), \qquad g(m_1) = 0{,}24.$$

Ces valeurs ne coïncident pas avec les coordonnées et l'ordonnée du premier itéré dessinées dans le sujet adapté.

On peut déterminer exactement toute la suite issue de ce point initial. En posant $z_p = m_p - m$, la relation $f(m) = u$ donne

$$z_{p+1} = z_p - \alpha f(z_p).$$

Or

$$z_0 = (-2,-1) = -\frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1).$$

Comme $f(1,1) = 3(1,1)$ et $f(1,-1) = (1,-1)$, une récurrence donne

$$\boxed{m_p = (1,0) - \frac{3}{2}(1-3\alpha)^p(1,1) - \frac{1}{2}(1-\alpha)^p(1,-1).}$$

Les deux directions propres sont orthogonales, chacune de norme $\sqrt{2}$. En appliquant la question 5,

$$\boxed{g(m_p) = -1 + \frac{27}{4}(1-3\alpha)^{2p} + \frac{1}{4}(1-\alpha)^{2p}.}$$

Pour $\alpha_0 = 0{,}2$, les facteurs valent $0{,}4$ et $0{,}8$. La formule confirme la convergence vers $(1,0)$ et une décroissance des valeurs vers -1, toujours par valeurs supérieures.

Pour $\alpha_1 = 0{,}67 > 2/3$, on a $1 - 3\alpha_1 = -1{,}01$ et $1 - \alpha_1 = 0{,}33$. Avec ce même point initial, la première composante propre alterne de signe et son amplitude tend vers $+\infty$. Ainsi $g(m_p) \to +\infty$ et $\|m_p - m\| \to +\infty$. Ce phénomène vaut pour tout point initial dont $m_0 - m$ a une composante non nulle dans la direction $(1,1)$.

La convergence pour α_0 est conforme aux résultats démontrés, mais plusieurs valeurs de la figure adaptée doivent être corrigées.

Problème – I. Étude de la fonction de répartition

On définit $F(x) = e^x/(1+e^x)$ sur $\mathbb{R}$. On étudie cette fonction, puis la loi qu'elle définit, avant de construire une estimation de π et des intervalles de confiance.

Corrigé – Problème – I. Étude de la fonction de répartition.

1. Calcul de F en Python.

```
import numpy as np

def F(x):
    if x >= 0:
        return 1/(1+np.exp(-x))
    else:
        y = np.exp(x)
        return y/(1+y)
```

Les deux expressions sont égales à $e^x/(1+e^x)$; cette écriture évite de calculer une exponentielle d'argument positif très grand.

$$\boxed{\texttt{F(x)} \text{ renvoie } \frac{e^x}{1+e^x}.}$$

2. Dérivées.

L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $1+e^x > 0$ pour tout x. Le quotient est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La règle de dérivation d'un quotient donne

$$F'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2}, \qquad \boxed{f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.}$$

En dérivant à nouveau,

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{2e^{2x}}{(1+e^x)^3}, \qquad \boxed{f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.}$$

3. Variations et limites.

La dérivée $F' = f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1.$$

Ainsi

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante de 0 vers 1,} \qquad F(0) = \frac{1}{2}.}$$

Le signe de f' est celui de $1-e^x$: positif pour $x<0$, nul en 0, négatif pour $x>0$. À gauche, $f(x) \to 0$ directement ; à droite, l'écriture $f(x) = e^{-x}/(1+e^{-x})^2$ donne également la limite 0. Son tableau de variations est donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

4. Parité de f et de $F - 1/2$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{2x},

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x).$$

D'autre part,

$$F(-x) = \frac{1}{1+e^x} = 1 - F(x), \qquad F(-x) - \frac{1}{2} = -\left(F(x) - \frac{1}{2}\right).$$

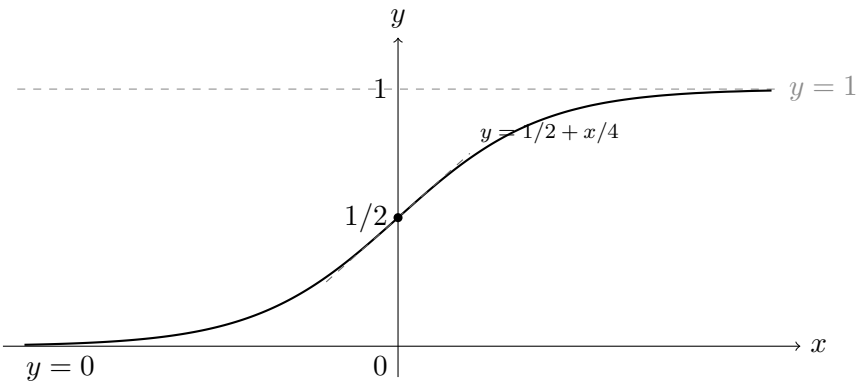
Ainsi

$$\boxed{f \text{ est paire}, \qquad F - \frac{1}{2} \text{ est impaire.}}$$

5. Allure de la courbe de F.

Les droites $y = 0$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Puisque $F'' = f'$ est positive pour $x < 0$ et négative pour $x > 0$, la courbe est convexe sur $]-\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$. Elle possède un unique point d'inflexion, qui est aussi son centre de symétrie par la question 4 :

$$\boxed{I = (0, 1/2), \qquad \text{tangente en } I : \ y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.}$$



6. Bijection et fonction réciproque.

La fonction F est continue et strictement croissante, avec limites 0 et 1. Le théorème de la bijection montre que son image est $I =]0, 1[$ et qu'elle réalise une bijection sur cet intervalle. Pour $t \in]0, 1[$,

$$t = \frac{e^x}{1+e^x} \iff t = (1-t)e^x \iff e^x = \frac{t}{1-t}.$$

Le quotient étant strictement positif,

$$\boxed{F : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[\text{ est bijective}, \qquad F^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right).}$$

Problème – II. Une variable de répartition F

Vérifier la densité, établir l'existence des moments par comparaison, puis calculer la variance à l'aide d'une identité géométrique finie. Le reste est majoré avant le passage à la limite.

Corrigé – Problème – II. Une variable de répartition F.

7. Convergence de la série.

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge, car son exposant 2 est strictement supérieur à 1. Comme

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

la série demandée converge absolument, donc converge. Avec la valeur admise,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.}$$

8. Densité et fonction de répartition.

La fonction $f(x) = e^x/(1+e^x)^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Pour $a < b$, puisque $F' = f$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Les limites $F(a) \to 0$ lorsque $a \to -\infty$ et $F(b) \to 1$ lorsque $b \to +\infty$ montrent que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Les trois conditions caractérisant une densité sont donc satisfaites. Pour tout réel x,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - 0 = F(x).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité, de répartition } F.}$

9. Existence de l'espérance et de la variance.

Pour $x \geq 0$, on peut écrire

$$0 \leq f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \leq e^{-x}.$$

La parité de f donne donc $0 \leq f(x) \leq e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$. Pour $k = 1$ ou $k = 2$, les croissances comparées donnent $t^k e^{-t/2} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Pour t assez grand,

$$0 \leq t^k e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = 2$ et les fonctions considérées sont continues sur tout segment. Les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent donc. Par comparaison et symétrie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Ainsi $\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance finies.}}$

10. Espérance de X.

a) Pour $A > 0$, effectuons le changement de variable $x = -t$. L'application $t \mapsto -t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, A]$ sur $[-A, 0]$, de dérivée -1. Avec $f(-t) = f(t)$,

$$\int_{-A}^{0} xf(x)\ \mathrm{d}x = \int_{A}^{0} (-t)f(-t)(-\,\mathrm{d}t) = -\int_{0}^{A} tf(t)\ \mathrm{d}t.$$

Les deux intégrales impropres convergent absolument, d'après la question 9. Le changement de variable conserve donc leur nature et le passage à la limite donne

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} xf(x)\ \mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} xf(x)\ \mathrm{d}x.}$$

b) En ajoutant les deux intégrales convergentes,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0.}$

11. Deux expressions intégrales de la variance.

Puisque $\mathbb{E}(X) = 0$, la formule de König–Huygens donne $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$. La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire et son intégrale converge, donc

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}\ \mathrm{d}x.}$$

Posons $h(x) = e^{-x}/(1+e^{-x})$. Sur tout segment $[0, A]$, les fonctions $u(x) = x^2$ et $v(x) = -h(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$u'(x) = 2x, \qquad v'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f(x).$$

Une intégration par parties sur $[0, A]$ donne

$$\int_{0}^{A} x^2 f(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{A^2 e^{-A}}{1+e^{-A}} + 2\int_{0}^{A} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\ \mathrm{d}x.$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissances comparées. L'intégrale du dernier membre converge car son intégrande est compris entre 0 et xe^{-x}. En passant à la limite puis en multipliant par 2,

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = 4\int_{0}^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\ \mathrm{d}x.}$$

12. Calcul de l'intégrale élémentaire.

Fixons $n \geq 1$. Sur $[0, A]$, les fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-nx}/n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-nx}$. L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\int_{0}^{A} xe^{-nx}\ \mathrm{d}x = -\frac{Ae^{-nA}}{n} + \frac{1}{n}\int_{0}^{A} e^{-nx}\ \mathrm{d}x = -\frac{Ae^{-nA}}{n} + \frac{1-e^{-nA}}{n^2}.$$

Comme $Ae^{-nA} \to 0$ et $e^{-nA} \to 0$, l'intégrale converge et

$$\boxed{\forall n \geq 1, \qquad \int_{0}^{+\infty} xe^{-nx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}.}$$

13. Identité finie et reste.

Pour $x \geq 0$, l'identité géométrique finie de raison $-e^{-x}$ donne

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}e^{-nx} = \frac{e^{-x}(1-(-e^{-x})^N)}{1+e^{-x}}.$$

En isolant $e^{-x}/(1+e^{-x})$ et en multipliant par x, il vient

$$\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}xe^{-nx} + (-1)^N\frac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}.$$

Chaque intégrale de la somme finie converge d'après la question 12. Celle du reste converge aussi, car $0 \leq R_N(x) \leq xe^{-(N+1)x}$ et l'intégrale de cette dernière fonction converge. On intègre l'identité sur $[0, A]$, puis on fait tendre A vers $+\infty$: il s'agit seulement d'une somme finie d'intégrales convergentes. Par la question 11,

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,\mathrm{d}x + (-1)^N\int_0^{+\infty} R_N(x)\,\mathrm{d}x\right).}$$

14. Contrôle du reste.

a) Le dénominateur de $R_N(x)$ est au moins égal à 1 et son numérateur est positif. Donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \qquad |R_N(x)| = R_N(x) \leq xe^{-(N+1)x}.}$$

b) Par croissance de l'intégrale et par la question 12,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} R_N(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} xe^{-(N+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Le théorème d'encadrement donne

$$\boxed{\int_0^{+\infty} R_N(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0.}$$

15. Valeur de la variance.

En remplaçant chaque intégrale élémentaire par $1/n^2$ dans la question 13,

$$\mathbb{V}(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + (-1)^N\int_0^{+\infty} R_N(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Le reste tend vers 0 en valeur absolue, et la somme partielle tend vers $\pi^2/12$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}.}$$

Problème – III. Estimation de π

Appliquer la loi faible des grands nombres aux carrés des observations, simuler par inversion de la fonction de répartition, puis utiliser le théorème central limite. Les majorations numériques conduisent à un intervalle conservateur, dont la couverture limite est au moins 95%.

Corrigé – Problème – III. Estimation de π.

16. Convergence en probabilité de V_n.

Les variables $Y_i = X_i^2$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, car chacune dépend seulement de X_i. D'après les questions 10 et 15, et la variance admise,

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \mathbb{V}(Y_i) = \frac{16\pi^4}{45} < +\infty.$$

La loi faible des grands nombres s'applique à leur moyenne :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\pi^2}{3}.}$$

On peut aussi le vérifier directement. L'indépendance et la linéarité de l'espérance donnent $\mathbb{E}(V_n) = \pi^2/3$ et $\mathbb{V}(V_n) = 16\pi^4/(45n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev fournit

$$\mathbb{P}\left(\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{16\pi^4}{45n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

17. Construction de T_n.

Puisque $V_n \geq 0$, on peut poser

$$\boxed{T_n = \sqrt{3V_n}.}$$

La fonction $v \mapsto \sqrt{3v}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc la composition conserve la convergence en probabilité. Plus explicitement,

$$|T_n - \pi| = \frac{3|V_n - \pi^2/3|}{\sqrt{3V_n} + \pi} \leq \frac{3}{\pi}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|T_n - \pi| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| > \frac{\pi\varepsilon}{3}\right) \longrightarrow 0.$$

Ainsi $\boxed{T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \pi.}$

18. Simulation par inversion.

Soit $Y = F^{-1}(U)$. Pour tout réel x, la croissance stricte de F et de sa réciproque donne

$$\{Y \leq x\} = \{U \leq F(x)\}.$$

Or $0 < F(x) < 1$ et la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $]0,1[$ vaut t pour $t \in]0,1[$. Donc

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

Les variables Y et X ont la même fonction de répartition, d'où

$$\boxed{F^{-1}(U) = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \text{ suit la même loi que } X.}$$

19. Fonction `realisation_X`.

On tire un nombre uniforme u, puis on applique F^{-1}. On écarte les extrémités 0 et 1 pour que le logarithme soit défini.

```
import numpy.random as rd

def realisation_X():
    u = rd.random()
    while u <= 0 or u >= 1:
        u = rd.random()
    return np.log(u / (1 - u))
```

La question 18 justifie que la valeur renvoyée réalise la loi de X.

20. Fonction `estimation_pi`.

Pour un entier $n \geq 1$, on effectue n tirages indépendants, on additionne leurs carrés, puis on renvoie $\sqrt{3V_n}$.

```
def estimation_pi(n):
    somme = 0
    for i in range(n):
        x = realisation_X()
        somme = somme + x ** 2
    return np.sqrt(3 * somme / n)
```

La fonction est définie pour $n \geq 1$; pour $n = 0$, la moyenne V_n n'est pas définie.

21. Intervalles de confiance asymptotiques.

a) La fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque sa densité est continue et strictement positive. En outre, $\Phi(0) = 1/2$ et $\Phi(t) \to 1$ lorsque $t \to +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc un unique $z > 0$ tel que $\Phi(z) = 0{,}975$. Ainsi

$$\boxed{\exists!\, z > 0, \quad \Phi(z) = 0{,}975.}$$

L'énoncé admet $z \leq 2$ et $\pi \leq 4$.

b) Les variables Y_i sont indépendantes, de même loi et de variance finie strictement positive. Leur écart-type vaut

$$\sigma = \sqrt{\frac{16\pi^4}{45}} = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{5}}.$$

Le théorème central limite donne

$$Z_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(V_n - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left(V_n - \frac{\pi^2}{3}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Pour justifier le passage à une probabilité d'intervalle, notons H_n la fonction de répartition de Z_n. Pour $0 < \eta < z$,

$$H_n(z) - H_n(-z) \leq \mathbb{P}(-z \leq Z_n \leq z) \leq H_n(z) - H_n(-z-\eta).$$

La convergence en loi signifie ici $H_n(t) \to \Phi(t)$ pour tout réel t, puisque Φ est continue. Par continuité de Φ, la différence entre les deux limites d'encadrement devient arbitrairement petite lorsque $\eta \to 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(|Z_n| \leq z) \longrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0{,}95.$$

On obtient bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leq z\right) \longrightarrow 0{,}95.}$$

c) Posons $\mu = \pi^2/3$. L'événement précédent s'écrit

$$|V_n - \mu| \leq \frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}}.$$

Les majorations admises donnent

$$\frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}} \leq \frac{4 \times 16 \times 2}{3\sqrt{5n}}.$$

Un intervalle ne faisant intervenir ni π ni z est donc

$$\boxed{I_n = [V_n - d_n, V_n + d_n], \qquad d_n = \frac{128}{3\sqrt{5n}}.}$$

Il contient l'intervalle de rayon $4\pi^2 z/(3\sqrt{5n})$ étudié en b). Les bornes ont été élargies : le niveau obtenu est *au moins* 95% asymptotiquement. Pour préciser cette nuance, l'événement $\{\mu \in I_n\}$ équivaut à

$$|Z_n| \leq \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} d_n = \frac{32}{\pi^2}.$$

Le même argument de fonctions de répartition que dans b) donne

$$\boxed{\mathbb{P}(\mu \in I_n) \longrightarrow 2\Phi\left(\frac{32}{\pi^2}\right) - 1 \geq 0{,}95.}$$

Ainsi cet intervalle est conservateur : sa probabilité limite de couverture est supérieure ou égale au niveau annoncé, et n'est pas imposée égale à 0,95. En fait, $\pi < 4$ entraîne $32/\pi^2 > 2 \geq z$; la croissance stricte de Φ donne alors une limite strictement supérieure à 0,95.

d) Comme $\mu > 0$ et $V_n + d_n > 0$, on peut couper la borne inférieure de I_n en 0, puis appliquer la fonction strictement croissante $v \mapsto \sqrt{3v}$. On obtient

$$\boxed{J_n = \left[\sqrt{3\max(0, V_n - d_n)},\ \sqrt{3(V_n + d_n)}\right].}$$

Les événements $\{\mu \in I_n\}$ et $\{\pi \in J_n\}$ sont exactement les mêmes : μ est positif et $\pi = \sqrt{3\mu}$. Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{P}(\pi \in J_n) \longrightarrow 2\Phi\left(\frac{32}{\pi^2}\right) - 1 \geq 0{,}95.}$$

Le centre de J_n n'est pas nécessairement T_n, car la racine carrée n'est pas une transformation affine.

22. Commentaire de la figure d'estimation.

Sur la figure, l'estimateur fluctue fortement pour les petites tailles, puis ses valeurs se rapprochent de π. Cet aspect est compatible avec la convergence en probabilité de T_n : pour toute erreur fixée $\varepsilon > 0$, la probabilité d'une erreur supérieure à ε tend vers 0. Cette convergence ne garantit ni une évolution monotone ni le rapprochement sur chaque réalisation.

La largeur théorique de I_n vaut $2d_n = 256/(3\sqrt{5n})$ et tend vers 0. Les deux bornes de J_n convergent en probabilité vers π, par la continuité des fonctions $v \mapsto \max(0, v)$ et $v \mapsto \sqrt{3v}$. Le resserrement du dessin est donc qualitativement cohérent avec les résultats précédents ; les coordonnées du dessin ne reproduisent toutefois pas exactement les bornes calculées en 21 d). Par exemple, pour $n = 10\,000$ et $T_n = 3$, on a $V_n = 3$ et la formule donne $J_n \simeq [2{,}903; 3{,}094]$, au lieu des bornes $[2{,}95; 3{,}10]$ dessinées.

À l'extrémité droite du dessin, l'intervalle représenté est approximativement $[2{,}95; 3{,}10]$: il ne contient pas π, qui vaut environ 3,14. Cela n'invalide pas un niveau de confiance probabiliste. Un intervalle donné peut manquer la vraie valeur π, même lorsque la procédure possède une couverture élevée.

Resserrement des intervalles ; fluctuations et échecs possibles.

23. Commentaire des cent répétitions.

Pour un entier n fixé, notons $p_n = \mathbb{P}(\pi \in J_n)$. Si les 100 expériences sont indépendantes, le nombre S_n d'intervalles contenant π suit une loi binomiale de paramètres 100 et p_n. La proportion représentée $S_n/100$ est donc aléatoire et vérifie

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{100}\right) = p_n, \qquad \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{100}\right) = \frac{p_n(1-p_n)}{100}.$$

Il n'y a donc aucune obligation d'obtenir exactement 95 succès sur 100, ni même d'obtenir une proportion supérieure à 95% dans chaque série d'expériences. De plus, le résultat théorique est asymptotique : il ne prescrit pas la couverture pour chaque petite taille n.

La figure montre ici des proportions comprises approximativement entre 96% et 100%. Cette observation est compatible avec la construction conservatrice de l'intervalle : sa couverture théorique tend vers

$$\boxed{2\Phi\left(\frac{32}{\pi^2}\right) - 1 > 0{,}95.}$$

Le tracé au-dessus de 95% illustre une expérience possible ; il ne démontre pas une garantie valable pour chaque répétition ni pour toute taille d'échantillon.