

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2023

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires.</i>	<i>2</i>
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.</i>	<i>3</i>
3 Problème	5
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; Python.</i>	<i>5</i>

1 Exercice 1

Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer AB et BA .
- b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA .

Soient A et B deux matrices quelconques de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.
- a) Justifier que $BX \neq 0$.
 - b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA .
3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
- a) Supposons que B est inversible. Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA .
 - b) Supposons que B n'est pas inversible. Montrer que $\text{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA .
4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Partie 2

On considère A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n -uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
- a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
 - b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A , aboutir à une contradiction.
 - c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$?
7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
- a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X .
 - b) Exprimer de deux manières différentes BAX .
 - c) En déduire que $BX \in \text{Vect}(X)$.
8. Déduire que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B .

9. a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :
- $$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$
- b) Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$. Montrer que $\text{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.
10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
- a) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.
- b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad BX_i = P(\lambda_i)X_i$.
- c) Montrer que $B = P(A)$.
11. a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.
- c) À l'aide de la question 6, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

2 Exercice 2

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on considère que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et que la norme associée est notée $\|\cdot\|$. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Enfin, on considère $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et l'on définit g sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle.$$

- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note alors f^{-1} la réciproque de f .
- Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
 - Exprimer ${}^t A$ en fonction de A .
 - En déduire qu'il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^t P A P$ soit diagonale.
 - Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.
 - Montrer que $\langle f(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
 - Exprimer $g(x)$ en fonction des x_i , des $a_{i,j}$ et des u_i .
 - Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et préciser $\partial_1 g(x)$.
 - Vérifier que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\nabla g(x) = f(x) - u$.
- Montrer que g admet un unique point critique m de $\mathbb{R}^n$ et que $m = f^{-1}(u)$.
- Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{2} \langle f(x - m), x - m \rangle = g(x) - g(m)$.

6. Que peut-on en déduire au sujet du point m , vis-à-vis de g ?

On considère un réel $\alpha \in]0, \frac{1}{\lambda_n}[$ et un vecteur m_0 de $\mathbb{R}^n$, et l'on définit par récurrence des vecteurs m_p de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{p+1} = m_p - \alpha \nabla g(m_p).$$

7. Soient $a, h \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\langle f(a+h), a+h \rangle = \langle f(a), a \rangle + 2\langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle$.

b) En déduire que $g(a+h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle$.

8. a) En appliquant cette égalité à des vecteurs a, h bien choisis, montrer que, pour tout entier naturel p ,

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel p ,

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2.$$

9. a) Montrer que la suite $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

On admet que $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$, où m a été défini à la question 4.

a) Montrer que, pour tout entier naturel p , $\|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1} (g(m_p) - g(m))$.

b) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|m_p - m\| = 0$.

10. Dans cette question, on suppose que $n = 2$, que $u = (2, 1)$ et que $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

Dans la figure 1, on a représenté l'évolution des suites $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ en prenant deux paramètres différents ($\alpha_0 = 0,2$ et $\alpha_1 = 0,67$). Dans la figure de gauche, on représente l'évolution de $g(m_p)$ en fonction de p , et dans la figure de droite l'évolution des points m_p dans le plan, en reliant les points successifs.

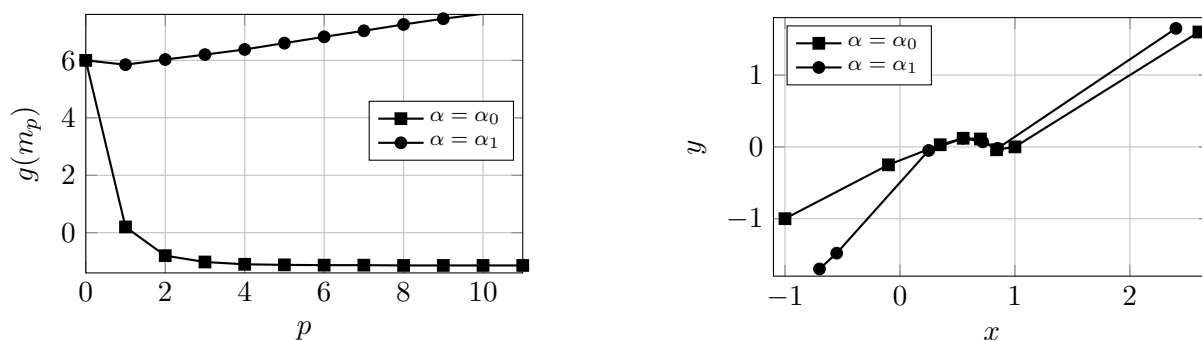


FIGURE 1 – Deux descentes de gradient, pour deux valeurs de α différentes.

- Commenter ces courbes, et déterminer qualitativement lequel des deux α ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé (il n'y en a qu'un seul).
- Conjecturer la valeur de m , sachant que m est à coordonnées entières.
- Vérifier que les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées, et que les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

3 Problème

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; Python.

Partie 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1. La librairie Numpy est importée sous la dénomination `np`. Écrire une fonction en langage Python nommée `F` prenant en argument un réel `x` et renvoyant en sortie le réel $F(x)$.
2. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f = F'$, puis justifier que $f' : x \mapsto \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.
3. Dresser le tableau de variations des fonctions f et F sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les limites aux bornes.
4. Déterminer la parité des fonctions f et $F - \frac{1}{2}$.
5. Sur un schéma, tracer l'allure de la courbe de F , en faisant apparaître tous les éléments remarquables (asymptotes, points d'inflexion notamment).
6. Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I (à déterminer), et donner l'expression de F^{-1} , la fonction réciproque de F .

Partie 2

7. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
8. Justifier que f est une densité de probabilité, et que F est la fonction de répartition associée.

Dans cette partie et dans la suivante, on note X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition est F , et dont f est une densité.

9. Justifier que X admet une espérance et une variance.
10. a) En utilisant un résultat obtenu à la question 4 et à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = - \int_0^{+\infty} x f(x) dx$.
b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
11. Justifier que $\mathbb{V}(X) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx$, puis que $\mathbb{V}(X) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$.
12. Pour tout entier naturel n non nul, justifier la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$.
13. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{V}(X) = 4 \left(\sum_{n=1}^N \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right),$$

$$\text{où } \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad R_N(x) = \frac{x e^{-(N+1)x}}{1 + e^{-x}}.$$

14. a) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, |R_N(x)| \leq xe^{-(N+1)x}$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} R_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

15. Dédurre de toutes les questions précédentes que $\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}$.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes de même loi que X . On admet que X^2 admet une variance et que $\mathbb{V}(X^2) = \frac{16\pi^4}{45}$.

16. Montrer que $V_n = \frac{1}{n}(X_1^2 + \dots + X_n^2)$ converge en probabilité vers $\frac{\pi^2}{3}$.

17. Construire une variable aléatoire T_n qui converge en probabilité vers π . On justifiera précisément le résultat.

18. Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X , où la fonction F est définie dans la partie 1.

19. La bibliothèque `numpy random` est importée sous la dénomination `rd`. On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation_X`, ne prenant aucun argument en entrée et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

20. Écrire une fonction en langage Python, nommée `estimation_pi`, prenant un entier naturel `n` en entrée et renvoyant une estimation de π à l'aide de la question 17.

21. a) Montrer qu'il existe un réel positif z tel que $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0,975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On admet que $z \leq 2$, ainsi que $\pi \leq 4$.

b) Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leq z\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,95$.

c) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95%, ne dépendant ni de π , ni de z .

d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de π au niveau de confiance 95%.

22. Dans la figure 2, on a tracé l'évolution, en fonction de n , de l'estimateur et de l'intervalle de confiance construits précédemment. Commenter la figure obtenue au regard des questions précédentes.

23. Pour toutes les valeurs de n entre 1 et 10^3 , on a répété 100 fois l'expérience précédente, et on a tracé dans la figure 3 la proportion de fois où π appartient bien à l'intervalle de confiance proposé (en traits pleins), ainsi que la limite de 95% (en traits hachurés). Commenter la figure obtenue.

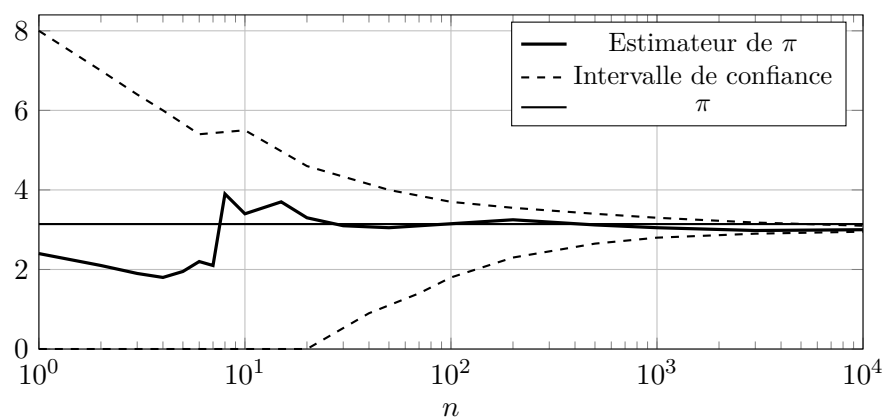
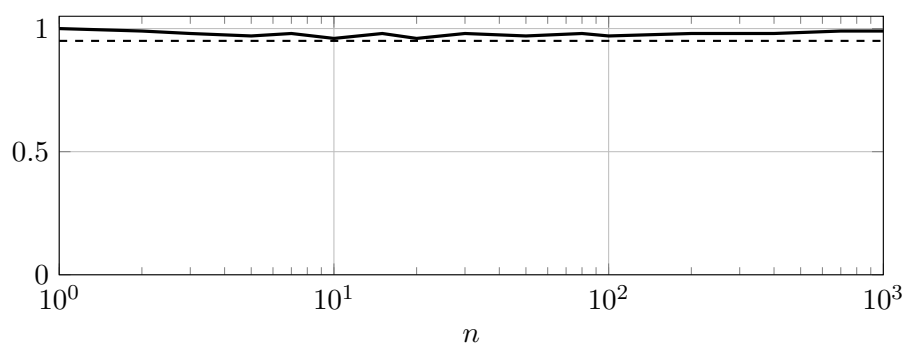
FIGURE 2 – Estimation de π .

FIGURE 3 – Évaluation de la qualité de l'intervalle de confiance.