

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2023

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Matrices de rang un

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang un, $n \geq 2$, et sa première colonne C est non nulle. On étudie ensuite une matrice d'ordre trois non inversible. Dans la question 2.a), la ligne L doit avoir exactement n coefficients : la liste imprimée comporte un coefficient de trop.

Corrigé – Exercice 1 – Matrices de rang un.

Partie I – Réduction d'une matrice de rang un

1. Noyau et première valeur propre.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f + \text{rg } f = n$. Ainsi

$$\dim \text{Ker } f = n - 1 \geq 1, \quad 0 \text{ est valeur propre de } f.$$

L'espace propre associé à zéro est précisément $\text{Ker } f$.

2. Écriture de M et relation sur son carré.

- a) L'espace engendré par les colonnes de M est de dimension un. Puisque C est une colonne non nulle, il en constitue une base. Chaque colonne j s'écrit donc $\ell_j C$, avec $\ell_1 = 1$. En posant

$$L = (\ell_1, \dots, \ell_n) = (1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R}),$$

on obtient $M = CL$, puisque les colonnes des deux matrices coïncident.

- b) Notons c_i les coefficients de C . Le coefficient diagonal (i, i) de CL est $c_i \ell_i$. Par définition de la trace,

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n c_i \ell_i = LC.$$

Le produit LC est ici identifié au réel constituant son unique coefficient.

- c) Par associativité des produits matriciels,

$$M^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \text{Tr}(M)CL = \text{Tr}(M)M.$$

3. Une seconde valeur propre éventuelle.

Posons $t = \text{Tr } M$. Le vecteur colonne C est non nul et

$$MC = (CL)C = C(LC) = tC.$$

Ainsi

$$t = \text{Tr } M \text{ est valeur propre de } M, \text{ de vecteur propre } C.$$

Si $t = 0$, il s'agit de la même valeur propre que celle de la question 1.

4. Cas $\text{Tr } M = 0$.

L'égalité $M^2 = 0$ fournit le polynôme annulateur x^2 . Toute valeur propre λ vérifie donc $\lambda^2 = 0$, soit $\lambda = 0$. Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, donc à la matrice nulle. Cela imposerait $M = 0$, en contradiction avec son rang un. Par conséquent

$$\text{Tr } M = 0 \implies M \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

5. Cas $\text{Tr } M \neq 0$.

Le polynôme annulateur $x(x - t)$ montre que les seules valeurs propres possibles sont 0 et t . Les questions 1 et 3 montrent qu'elles sont toutes deux présentes. Une base du noyau comporte $n - 1$ vecteurs propres pour zéro. Le vecteur C , propre pour $t \neq 0$, n'est pas dans le noyau. En l'ajoutant à cette base, on obtient n vecteurs linéairement indépendants : si $aC + v = 0$, $v \in \text{Ker } M$, l'application de M donne $atC = 0$, donc $a = 0$ puis $v = 0$. Il existe donc une base de vecteurs propres, d'où

$$\text{Sp}(M) = \{0, t\}, \quad \dim E_0 = n - 1, \quad \dim E_t = 1, \quad M \text{ est diagonalisable.}$$

Corrigé – Exercice 1 – Application en dimension trois.

Partie II – Une matrice non inversible

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad abc \neq 0,$$

et on suppose A non inversible.

6. Relation entre les paramètres et rang.

a) Si $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, les équations sont

$$x + y/a + z/b = 0, \quad ax + y + z/c = 0, \quad bx + cy + z = 0.$$

En retranchant a fois la première à la deuxième, puis b fois la première à la troisième, on trouve

$$\frac{b - ac}{bc}z = 0, \quad \frac{ac - b}{a}y = 0.$$

Si $ac \neq b$, ces égalités imposent $z = y = 0$, puis $x = 0$. Le noyau de A serait nul ; le théorème du rang, en dimension trois, rendrait alors A inversible. Cela contredit l'hypothèse. Ainsi

$$ac = b.$$

b) Avec $c = b/a$, les colonnes de A sont respectivement

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad C/a, \quad C/b.$$

Elles engendrent donc la droite $\text{Vect}(C)$, avec $C \neq 0$. Ainsi

$$\text{rg } A = 1, \quad A = C \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \end{pmatrix}.$$

7. Réduction et puissances de A .

a) On a $\text{Tr } A = 3 \neq 0$ et $\text{rg } A = 1$. La partie I donne immédiatement

$$g \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(g) = \{0, 3\}, \quad \dim E_0 = 2, \quad \dim E_3 = 1.$$

On peut préciser $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \right)$ et $E_0 = \{(x, y, z) : x + y/a + z/b = 0\}$.

b) La relation $A^2 = 3A$ donne, par récurrence : si $A^n = 3^{n-1}A$, alors $A^{n+1} = 3^{n-1}A^2 = 3^n A$. L'initialisation pour $n = 1$ est immédiate. Donc

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = 3^{n-1}A \in \text{Vect}(A).$$

Exercice 2 – Loi de Pareto et produit

Pour $c > 2$, la loi de Pareto étudiée ici est définie par la densité $f(x) = c/x^{c+1}$ pour $x \geq 1$, nulle pour $x < 1$. On ne suppose connue aucune propriété de cette loi.

Corrigé – Exercice 2 – Loi de Pareto et produit.**Partie I – Étude d’une loi de probabilité****1. Vérification de la densité.**

La fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et continue de part et d’autre du seul point exceptionnel possible 1. Pour $A > 1$, une primitive donne

$$\int_1^A \frac{c}{x^{c+1}} dx = [-x^{-c}]_1^A = 1 - A^{-c}.$$

Comme $c > 0$, $A^{-c} \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. L’intégrale sur $] -\infty, 1[$ est nulle. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad f \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. Espérance et variance de X .

La variable X est positive. Pour $r = 1$ ou $r = 2$, la formule de transfert pour son moment donne

$$\mathbb{E}(X^r) = c \int_1^{+\infty} x^{r-c-1} dx.$$

Comme $c > 2 \geq r$, l’exposant $r-c-1$ est strictement inférieur à -1 . L’intégrale converge et, en calculant une primitive sur $[1, A]$ puis la limite, on obtient $\mathbb{E}(X^r) = c/(c-r)$. Ainsi X possède un premier et un second moment finis.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{c}{c-1}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{c}{c-2}.$$

La formule de König–Huygens donne

$$\mathbb{V}(X) = \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} = \frac{c((c-1)^2 - c(c-2))}{(c-2)(c-1)^2}.$$

Le facteur entre parenthèses vaut 1 ; donc

$$\mathbb{V}(X) = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}.$$

3. Fonction de répartition de X .

Pour $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}(X \leq x)$ est nulle. Pour $x \geq 1$, l’intégration de la densité entre 1 et x donne

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - x^{-c}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 1, où elle vaut 0.

4. Loi de $Y = \ln X$ et simulation de X .

- a) Comme le logarithme est strictement croissant sur $]0, +\infty[$ et $X \geq 1$, pour tout réel x ,

$$G(x) = \mathbb{P}(\ln X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq e^x) = F(e^x).$$

- b) La formule de 3 donne

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-cx}, & x \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c .

$$Y \sim \mathcal{E}(c).$$

- c) Le paramètre d'échelle de l'exponentielle vaut $1/c$. On simule Y , puis on renvoie $X = \exp(Y)$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def SimulX(c):
    Y = rd.exponential(1 / c)
    return np.exp(Y)
```

`SimulX(c)` simule une variable de densité f .

Partie II – Produit de deux variables de Pareto

5. Simulation du produit $Z = X_1 X_2$.

Deux appels produisent deux tirages indépendants de la loi de X ; on renvoie leur produit.

```
def SimulZ(c):
    X1 = SimulX(c)
    X2 = SimulX(c)
    return X1 * X2
```

`SimulZ(c)` simule $Z = X_1 X_2$.

6. Moments du produit et vérification de la variance.

Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et ont des premiers et seconds moments finis calculés en 2. Leurs carrés sont aussi indépendants. Les factorisations des espérances donnent

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}.$$

Le second moment étant fini, la variance existe et vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z) &= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}. \end{aligned}$$

En développant le numérateur, $(c-1)^4 - c^2(c-2)^2 = 2c^2 - 4c + 1$. On retrouve donc la formule de l'énoncé :

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

7. Loi de la somme des logarithmes après multiplication par c .

- a) Par 4.b), $Y_i \sim \mathcal{E}(c)$ pour $i = 1, 2$. Pour $t \geq 0$, $\mathbb{P}(cY_i \leq t) = G(t/c) = 1 - e^{-t}$, et pour $t < 0$ cette probabilité est nulle.

$$cY_1 \sim \mathcal{E}(1), \quad cY_2 \sim \mathcal{E}(1).$$

- b) Les Y_i et les cY_i sont indépendants, comme fonctions séparées des variables indépendantes X_1, X_2 . L'exponentielle de paramètre 1 est la loi gamma à un paramètre de forme 1, notée $\gamma(1)$. La stabilité par somme de ces lois gamma donne

$$cY_1 + cY_2 \sim \gamma(2).$$

La loi $\gamma(2)$ possède la densité te^{-t} pour $t \geq 0$, nulle pour $t < 0$, puisque $\Gamma(2) = 1$.

8. Densité de $Y_1 + Y_2$, puis de Z .

- a) Puisque $c > 0$, pour tout réel x ,

$$H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x) = K(cx).$$

La fonction de répartition K de la loi $\gamma(2)$ est continue et sa dérivée pour $t > 0$ vaut te^{-t} . Pour $x > 0$, la dérivation de $K(cx)$, fonction d'une variable réelle, donne $c \cdot cxe^{-cx}$; pour $x < 0$, $H(x) = 0$. On peut choisir la densité nulle en 0 :

$$h(x) = \begin{cases} c^2xe^{-cx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Une primitive donne également $H(x) = 1 - (1 + cx)e^{-cx}$ pour $x \geq 0$.

- b) On a $Z = \exp(Y_1 + Y_2)$, donc pour $x > 0$, $F_Z(x) = H(\ln x)$. Pour $x \leq 0$, $F_Z(x) = 0$. En tenant compte du support $Z \geq 1$, cela donne

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - (1 + c \ln x)x^{-c}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est continue en 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ de part et d'autre de ce point. Pour $x > 1$, sa dérivée est $h(\ln x)/x = c^2 \ln x / x^{c+1}$. Cette dérivée tend vers 0 en 1^+ ; on choisit la même valeur en 1.

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

La densité a ainsi été obtenue par la fonction de répartition.

9. Une intégrale et nouveau calcul des moments.

- a) Fixons $a > 1$ et $A > 1$. Sur le segment $[1, A]$, posons $u(x) = \ln x$, $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x^{1-a}/(1-a)$ et $v'(x) = x^{-a}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$; l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln x}{x^a} dx &= \left[\frac{x^{1-a} \ln x}{1-a} \right]_1^A - \frac{1}{1-a} \int_1^A x^{-a} dx \\ &= -\frac{A^{1-a} \ln A}{a-1} + \frac{1 - A^{1-a}}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Les croissances comparées donnent $A^{1-a} \ln A \rightarrow 0$ et $A^{1-a} \rightarrow 0$. L'intégrale impropre converge donc et

$$\boxed{\forall a > 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx = \frac{1}{(a-1)^2}.$$

- b) La densité de 8.b) et la formule de transfert pour les moments donnent

$$\mathbb{E}(Z) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^c} dx, \quad \mathbb{E}(Z^2) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{c-1}} dx.$$

Comme $c > 2$, les deux exposants c et $c-1$ sont strictement supérieurs à 1, et a) assure la convergence. On retrouve

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2}, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}, \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

Exercice 3 – Quotient et reste d’une variable discrète

On note $p \in]0, 1[$ la probabilité de pile et $q = 1 - p$ celle de face. On suppose les lancers indépendants, hypothèse nécessaire aux calculs qui suivent et implicitement utilisée dans l’expérience de l’énoncé. La variable X compte les résultats face obtenus avant le premier pile. On écrit $X = 3Q + R$, avec $Q \in \mathbb{N}$ et $R \in \{0, 1, 2\}$.

Corrigé – Exercice 3 – Quotient et reste d’une variable discrète.**1. Loi de X , espérance et variance.**

- a) Pour $k \geq 1$, l’événement $[X = k]$ est $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$. Pour $k = 0$, c’est simplement P_1 . L’indépendance des lancers donne $\mathbb{P}(X = k) = q^k p$ dans les deux cas. Ces probabilités ont pour somme $p \sum_{k \geq 0} q^k = p/(1 - q) = 1$. La probabilité de ne jamais obtenir pile est nulle, car la probabilité que les m premiers résultats soient tous face est $q^m \rightarrow 0$; le théorème de la limite monotone pour cette suite décroissante d’événements donne la conclusion. On définit donc la notation $BN(p)$ par la loi suivante :

$$X \sim BN(p) \iff \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Aucune propriété de cette notation n’est supposée connue.

- b) Posons $Y = X + 1$. Pour $j \geq 1$, $\mathbb{P}(Y = j) = pq^{j-1}$; c’est la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, qui compte le rang du premier pile. Ses moments usuels sont $\mathbb{E}(Y) = 1/p$ et $\mathbb{V}(Y) = q/p^2$. En utilisant $X = Y - 1$, on établit ainsi les moments de $BN(p)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

2. Loi du quotient Q .

- a) La division euclidienne $X = 3Q + R$ avec $0 \leq R \leq 2$ donne

$$[Q = k] = [3k \leq X \leq 3k + 2] = [X = 3k] \cup [X = 3k + 1] \cup [X = 3k + 2].$$

- b) Les événements de a) sont disjoints ; avec 1.a),

$$\mathbb{P}(Q = k) = p(q^{3k} + q^{3k+1} + q^{3k+2}) = p(1 + q + q^2)q^{3k}.$$

Comme $p = 1 - q$, $p(1 + q + q^2) = 1 - q^3$. Le paramètre $1 - q^3$ appartient à $]0, 1[$. En comparant avec la définition de BN ,

$$\mathbb{P}(Q = k) = (1 - q^3)(q^3)^k \quad (k \in \mathbb{N}), \quad Q \sim BN(1 - q^3).$$

3. Loi du reste R .

Pour $r \in \{0, 1, 2\}$, $[R = r] = \bigcup_{k \geq 0} [X = 3k + r]$, réunion d’événements disjoints. Par additivité puis somme d’une série géométrique de raison $q^3 < 1$,

$$\mathbb{P}(R = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k+r} = \frac{pq^r}{1 - q^3} = \frac{q^r}{1 + q + q^2}.$$

$$\mathbb{P}(R = 0) = \frac{1}{1 + q + q^2}, \quad \mathbb{P}(R = 1) = \frac{q}{1 + q + q^2}, \quad \mathbb{P}(R = 2) = \frac{q^2}{1 + q + q^2}.$$

4. Indépendance du quotient et du reste.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$, l'unicité de la division euclidienne donne $[Q = k, R = r] = [X = 3k + r]$. D'une part, la probabilité du couple vaut pq^{3k+r} . D'autre part, les lois calculées en 2 et 3 donnent

$$\mathbb{P}(Q = k)\mathbb{P}(R = r) = (1 - q^3)(q^3)^k \frac{pq^r}{1 - q^3} = pq^{3k+r}.$$

La factorisation est donc vraie pour toutes les valeurs du couple ; c'est le critère d'indépendance des variables discrètes.

Q et R sont indépendantes.

5. Simulation de X , Q et R .

- a) La fonction `rd.geometric(p)` simule le rang du premier pile, de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. Le nombre de faces antérieurs vaut ce rang moins 1 :

```
def simulX(p):
    X = rd.geometric(p) - 1
    return X
```

`simulX(p)` simule $X \sim BN(p)$.

- b) Le quotient est la partie entière de $X/3$, et le reste est $X - 3Q$. Le programme est donc :

```
def div(p):
    X = simulX(p)
    Q = np.floor(X / 3)
    R = X - 3 * Q
    return (X, Q, R)
```

Les valeurs de Q et R sont entières et vérifient $0 \leq R \leq 2$.

`div(p)` renvoie les valeurs simulées de (X, Q, R) .

Problème – Fonctions périodiques et produit scalaire

Espace des fonctions n -périodiques sur $\mathbb{Z}$, base orthonormale, différences finies et inégalité portant sur la norme de Df . Dans ce problème, $n \geq 3$.

Corrigé – Problème – Fonctions périodiques et produit scalaire.**1. Périodicité de h .**

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la périodicité de la fonction cosinus donne

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = h(k).$$

Ainsi $h \in F_n$.

2. Structure d'espace vectoriel de F_n .

La fonction nulle est n -périodique, donc F_n est non vide. Soient $f, g \in F_n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\alpha f + \beta g)(k+n) = \alpha f(k+n) + \beta g(k+n) = \alpha f(k) + \beta g(k) = (\alpha f + \beta g)(k).$$

Ainsi F_n est stable par combinaison linéaire, d'où

$$F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

3. Valeur d'une fonction périodique en un entier quelconque.

Si $f \in F_n$, alors $f(t+n) = f(t)$ pour tout entier t . En remplaçant t par $t-n$, on obtient aussi $f(t-n) = f(t)$. La répétition de ces égalités donne, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $f(t+nq) = f(t)$, en utilisant des déplacements de $+n$ si $q \geq 0$ et de $-n$ si $q < 0$. Pour l'écriture $k = nq + r$ de l'énoncé, on en déduit

$$\forall f \in F_n, \quad f(k) = f(r), \quad r \in I_n.$$

Une fonction de F_n est donc entièrement déterminée par ses valeurs sur I_n .

4. Base de l'espace F_n .

- a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, écrivons $k = nq + r$ avec $r \in I_n$. La question 3, appliquée à f et aux fonctions e_i , donne

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r) = f(r) = f(k).$$

Seul le terme d'indice $i = r$ est non nul dans cette somme. Ainsi

$$\forall f \in F_n, \quad f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i.$$

- b) La formule précédente montre que B_n engendre F_n . Pour vérifier qu'elle est libre, supposons $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i = 0$. Pour chaque $j \in I_n$, l'évaluation de cette égalité en j donne $\alpha_j = 0$. Tous les coefficients sont donc nuls. On conclut que

$$B_n = (e_0, \dots, e_{n-1}) \text{ est une base de } F_n, \quad \dim F_n = n.$$

- c) Les coefficients de la décomposition de la question a) sont précisément les coordonnées de f dans B_n :

$$[f]_{B_n} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n-1) \end{pmatrix}.$$

5. Produit scalaire et sommes trigonométriques.

- a) L'application $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$ est bilinéaire, puisque la somme est finie, et symétrique, puisque $f(k)g(k) = g(k)f(k)$. De plus,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0.$$

Si cette somme est nulle, tous ses termes positifs ou nuls sont nuls : $f(k) = 0$ sur I_n . Par la question 3, f est alors nulle sur $\mathbb{Z}$. La réciproque est immédiate. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } F_n, \\ \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2. \end{aligned}$$

- b) Pour $i, j \in I_n$, la définition de e_i et e_j donne

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)e_j(k) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ainsi B_n est une base orthonormale de F_n .

- c) On somme de $k = 0$ à $k = n - 1$ l'identité trigonométrique admise. Le terme positif d'indice k est égal au terme négatif d'indice $k + 1$, d'où la somme télescopique

$$2 \sin(b/2) \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right).$$

Comme $0 < b < 2\pi$, on a $\sin(b/2) > 0$. La division est donc licite, et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin(b/2)}.$$

- d) Puisque $n \geq 3$, le nombre $b = 4\pi/n$ appartient à $]0, 2\pi[$. Pour cette valeur de b , les deux arguments au numérateur de la formule précédente diffèrent de $nb = 4\pi$. Leur sinus est donc le même, quel que soit a : la somme est nulle. En choisissant successivement $a = 0$ et $a = 2\pi/n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0.$$

e) Avec $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ et la première égalité de la question d),

$$\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\|h\| = \sqrt{n/2}}.$

Corrigé – Problème – Différences finies et inégalité de normes.

6. Endomorphisme des différences finies D .

a) Pour $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$Df(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n) = f(k+1) - f(k) = Df(k).$$

Ainsi $\boxed{\forall f \in F_n, \quad Df \in F_n}.$

b) Pour $f, g \in F_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D(\alpha f + \beta g)(k) &= \alpha(f(k+1) - f(k)) + \beta(g(k+1) - g(k)) \\ &= (\alpha Df + \beta Dg)(k). \end{aligned}$$

Donc D est linéaire. Avec la question a), on conclut que

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } F_n}.$$

c) Pour tous réels u, v , les formules d'addition donnent $\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2 \sin u \sin v$. En prenant $u = 2k\pi/n + \pi/n$ et $v = \pi/n$, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \quad Dh(k) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

d) Par la formule $\sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2$,

$$\begin{aligned} \|Dh\|^2 &= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) \right] \\ &= 2n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

la somme de cosinus étant nulle d'après la question 5 d). Comme $0 < \pi/n < \pi$,

$$\boxed{\|Dh\| = \sqrt{2n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

7. Symétrie de Δ et signe de ses valeurs propres.

a) La périodicité permet de décaler les indices dans les sommes finies :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1).$$

Pour la seconde égalité, par exemple, le changement d'indice $j = k + 1$ donne une somme de $j = 1$ à $j = n$; son terme d'indice n vaut $f(0)g(n-1) = f(0)g(-1)$, c'est-à-dire le terme d'indice 0 de la somme à droite. En développant le produit des différences, on trouve donc

$$\begin{aligned} \langle Df, Dg \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k))(g(k+1) - g(k)) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall f, g \in F_n, \quad \langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle.}$$

b) Par symétrie du produit scalaire et par la question a),

$$\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle = -\langle Dg, Df \rangle = \langle g, \Delta f \rangle = \langle \Delta f, g \rangle.$$

Ainsi $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$

c) Soit λ une valeur propre de Δ et $f \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda \|f\|^2 = \langle f, \Delta f \rangle = -\|Df\|^2 \leq 0.$$

Comme $\|f\|^2 > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{Sp}(\Delta), \quad \lambda \leq 0.}$$

8. Noyau de Δ .

a) Pour tout entier k , on a $\Delta \varepsilon_0(k) = 1 - 2 + 1 = 0$; donc

$$\boxed{\varepsilon_0 \in \text{Ker}(\Delta).}$$

b) Si $f \in \text{Ker}(\Delta)$, la question 7 a) donne

$$0 = \langle f, \Delta f \rangle = -\|Df\|^2.$$

Ainsi $Df = 0$, donc $f(k+1) = f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En répétant cette égalité, pour les entiers positifs comme négatifs, on voit que $f(k) = f(0)$ pour tout entier k . Par conséquent $f = f(0)\varepsilon_0$. Réciproquement, la question a) et la linéarité de Δ montrent que toute fonction de $\text{Vect}(\varepsilon_0)$ appartient au noyau. On conclut que

$$\boxed{\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(\varepsilon_0), \quad \dim \text{Ker}(\Delta) = 1.}$$

9. Inégalité sur l'orthogonal des fonctions constantes.

a) L'espace F_n est euclidien de dimension n , et Δ est un endomorphisme symétrique. Le théorème spectral assure donc l'existence d'une base orthonormale de vecteurs

propres. Comme le noyau est engendré par ε_0 , dont la norme vaut $\sqrt{n}$, on peut choisir cette base sous la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \right).$$

Les valeurs propres λ_i associées aux ε_i , $1 \leq i \leq n-1$, sont non nulles : sinon ε_i appartiendrait au noyau et serait un multiple de ε_0 , ce qui contredirait l'orthogonalité et sa norme égale à 1. D'après la question 7 c), elles sont donc strictement négatives. L'ensemble des valeurs propres non nulles est fini et non vide, puisque $n-1 \geq 1$. Le nombre c de l'énoncé est ainsi bien défini et

$$c = \min_{1 \leq i \leq n-1} (-\lambda_i) > 0.$$

Si $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$, sa coordonnée suivant $\varepsilon_0/\sqrt{n}$ est nulle. Sa décomposition dans cette base s'écrit donc

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varepsilon_i, \quad a_i = \langle f, \varepsilon_i \rangle.$$

b) En utilisant cette base orthonormale et la relation $\Delta \varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$,

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2, \quad \langle f, \Delta f \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i^2.$$

La question 7 a) donne alors

$$\|Df\|^2 = -\langle f, \Delta f \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} (-\lambda_i) a_i^2 \geq c \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2.$$

Ainsi

$$\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0 \implies \|Df\|^2 \geq c \|f\|^2.$$

10. Cas $n = 3$ et meilleure constante.

a) La première colonne de la matrice de Δ dans B_3 est constituée des valeurs de Δe_0 sur $I_3 = \{0, 1, 2\}$. Par périodicité,

$$\Delta e_0(0) = e_0(1) - 2e_0(0) + e_0(-1) = 0 - 2 + 0 = -2,$$

$$\Delta e_0(1) = e_0(2) - 2e_0(1) + e_0(0) = 0 - 0 + 1 = 1,$$

$$\Delta e_0(2) = e_0(3) - 2e_0(2) + e_0(1) = 1 - 0 + 0 = 1.$$

Ainsi la colonne cherchée est

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Chaque coefficient de J^2 est égal à 3, donc $J^2 = 3J$. La matrice admise de l'énoncé est $A = J - 3I_3$, d'où

$$A^2 = J^2 - 6J + 9I_3 = -3J + 9I_3 = -3A.$$

Ainsi

$$P(X) = X^2 + 3X \text{ est un polynôme annulateur de } A.$$

Toute valeur propre λ de A vérifie donc $\lambda^2 + 3\lambda = 0$, et appartient à $\{0, -3\}$. Ces deux nombres sont effectivement des valeurs propres, car

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A représentant Δ , on en déduit

$$\text{Sp}(\Delta) = \{0, -3\}, \quad c = 3.$$

L'inégalité de la question 9 s'écrit alors

$$\forall f \in F_3, \quad \langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0 \implies \|Df\|^2 \geq 3\|f\|^2.$$

c) Pour $n = 3$, la fonction h a les valeurs

$$h(0) = 1, \quad h(1) = -\frac{1}{2}, \quad h(2) = -\frac{1}{2}.$$

Elle est donc orthogonale à ε_0 , puisque ces valeurs ont une somme nulle. En outre,

$$\|h\|^2 = \frac{3}{2}, \quad \|Dh\|^2 = 2 \times 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2} = 3\|h\|^2.$$

Le vecteur h est non nul et réalise l'égalité. Toute constante K telle que $\|Df\|^2 \geq K\|f\|^2$ pour toutes les fonctions $f \in F_3$ orthogonales à ε_0 doit donc vérifier, en prenant $f = h$, $9/2 \geq K(3/2)$, soit $K \leq 3$. Comme $K = 3$ convient d'après la question b),

La constante 3 est la plus grande constante possible dans cette inégalité.