

emlyon

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2023

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Somme d'une série

Pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. On fixe $x \in]0, 1[$ et on détermine la somme de $\sum_{k \geq 1} x^k/k$ à partir de sommes finies.

Corrigé – Exercice 1 – Somme d'une série.

1. Comparaison de la somme harmonique et d'une intégrale.

- a) La fonction $t \mapsto 1/t$ décroît sur $]0, +\infty[$. Pour $k \leq t \leq k+1$, on a $1/(k+1) \leq 1/t \leq 1/k$. En intégrant sur un segment de longueur un,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

- b) On somme ces inégalités pour $k = 1, \dots, n-1$. Les intégrales s'ajoutent sur les segments adjacents, et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = S_n - 1, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n}.$$

- c) Comme l'intégrale vaut $\ln n$, les deux inégalités se réécrivent

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln n + 1 \quad (n \geq 2).$$

- d) Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$. En divisant l'encadrement précédent par $\ln n$,

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc

$$\frac{S_n}{\ln n} \longrightarrow 1, \quad \text{c'est-à-dire } S_n \sim \ln n.$$

La notation $\sim$ signifie ici précisément que le quotient tend vers 1.

2. Interprétation et coût du programme.

a) Le programme est

```
def rang(a):
    k = 1
    s = 1
    while s < a:
        k = k+1
        s = s+1/k
    return k
```

Au début de chaque test de la boucle, $s = S_k$. La propriété est vraie à l'initialisation, et la mise à jour ajoute le terme $1/(k+1)$ à la somme précédente. Dans un calcul exact, les sommes S_k croissent strictement et tendent vers $+\infty$ d'après la question 1 ; la boucle s'arrête donc au premier entier $k \geq 1$ tel que $S_k \geq a$. Ainsi, dans cette interprétation mathématique,

`rang(50)` cherche $\min\{k \geq 1 : S_k \geq 50\}$.

b) Si $S_k \geq 50$, la majoration $S_k \leq 1 + \ln k$ impose $\ln k \geq 49$, donc

$$k \geq e^{49} \simeq 1,907 \times 10^{21}.$$

Il faudrait au moins cet ordre de grandeur d'itérations pour atteindre le seuil : l'appel est donc inexploitable en pratique. Il n'est pas exécuté ici. Le raisonnement de terminaison concerne les sommes exactes ; en calcul flottant, les arrondis peuvent en outre empêcher une somme de continuer à augmenter lorsque l'incrément est trop petit.

3. Somme de la série $\sum x^k/k$.

a) Pour $0 \leq t \leq x < 1$, on peut utiliser la somme géométrique finie :

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}.$$

La convention $t^0 = 1$ permet aussi cette formule en $t = 0$.

b) On intègre la somme finie entre 0 et x . Chaque terme est continu, et la linéarité donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} &= \int_0^x \sum_{k=1}^n t^{k-1} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt. \end{aligned}$$

La première intégrale vaut $-\ln(1-x)$; ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) Sur $[0, x]$, $0 \leq 1/(1-t) \leq 1/(1-x)$. On obtient

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}.$$

Comme $0 < x < 1$, le majorant tend vers zéro. Par encadrement,

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \longrightarrow 0.}$$

d) L'identité de b) et la limite de c) montrent que les sommes partielles convergent. Par définition de la somme d'une série,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad (0 < x < 1).}$$

Tous ces calculs utilisent des sommes finies avant le passage à la limite.

Exercice 2 – Minimum de variables uniformes

Les variables X_k sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $]0, 1[$. Pour $n \geq 2$, on pose $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $T_n = Z_n - X_n$. Dans les programmes, on utilise les imports usuels `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Corrigé – Exercice 2 – Minimum de variables uniformes.**1. Fonction de répartition et densité de Z_n .**

- a) Le minimum est compris entre 0 et 1. Pour $0 \leq x \leq 1$, l'événement $[Z_n > x]$ équivaut à $\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]$. L'indépendance et la loi uniforme donnent

$$\mathbb{P}(Z_n > x) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x) = (1 - x)^n.$$

En prenant l'événement complémentaire et en traitant les valeurs extérieures au support,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1 - x)^n, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

- b) La fonction F_n est continue sur toute la droite, notamment en 0 et en 1. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles séparés par ces deux points. Le critère à partir de la fonction de répartition assure donc que

Z_n est une variable aléatoire à densité.

- c) Sur $]0, 1[$, la dérivée de F_n vaut $n(1 - x)^{n-1}$; sur les deux intervalles extérieurs, elle est nulle. Les valeurs aux deux points 0 et 1 peuvent être choisies comme dans la formule de l'énoncé :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - x)^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Simulation du minimum.

L'instruction `rd.random(n)` simule n uniformes indépendantes, et `np.min` renvoie le minimum des valeurs produites.

```
def VarZ(n):
    return np.min(rd.random(n))
```

`VarZ(10)` simule une réalisation de Z_{10} .

3. Convergence en loi de Z_n .

Soit Z la variable aléatoire certaine égale à 0. Sa fonction de répartition est $F_Z(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_Z(x) = 1$ pour $x \geq 0$; elle est continue à chaque point $x \neq 0$. Pour $x < 0$, $F_n(x) = 0 = F_Z(x)$. Pour $0 < x < 1$, $0 < 1 - x < 1$, donc $(1 - x)^n \rightarrow 0$ et $F_n(x) \rightarrow 1 = F_Z(x)$. Enfin, pour $x \geq 1$, $F_n(x) = 1 = F_Z(x)$. Ainsi les fonctions de

répartition convergent en chaque point de continuité de F_Z , ce qui est la définition de la convergence en loi.

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad Z = 0 \text{ avec probabilité } 1.$$

En $x = 0$, $F_n(0) = 0$ ne tend pas vers $F_Z(0) = 1$; cela ne contredit pas la conclusion, car ce point est une discontinuité de F_Z .

4. Probabilité $\mathbb{P}(Z_n = X_n)$ et simulation de T_n .

- a) On pose $Z_1 = X_1$ pour traiter également $n = 2$. Pour tout $m \geq 1$, la variable Z_m a pour densité $m(1 - z)^{m-1}$ sur $[0, 1]$, nulle ailleurs : pour $m \geq 2$, c'est 1.c), et pour $m = 1$, c'est simplement la densité uniforme. Le minimum Z_{n-1} est une fonction de $X_1, \dots, X_{n-1}$; il est donc indépendant de X_n . Comme $Z_n = \min(Z_{n-1}, X_n)$,

$$[Z_n = X_n] = [X_n \leq Z_{n-1}].$$

Nous calculons la loi de $D = Z_{n-1} - X_n$ pour justifier cette probabilité sans utiliser l'admission sur g_{n-1} lorsque $n = 2$. La variable $-X_n$ possède la densité uniforme sur $[-1, 0]$. Le théorème de convolution s'applique aux deux variables indépendantes :

$$d_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(z) \mathbf{1}_{[-1, 0]}(t - z) dz.$$

Pour $0 \leq t < 1$, seuls les $z \in [t, 1]$ contribuent ; ainsi

$$d_n(t) = \int_t^1 (n-1)(1-z)^{n-2} dz = [-(1-z)^{n-1}]_t^1 = (1-t)^{n-1}.$$

Pour $-1 < t < 0$, seuls les $z \in [0, 1+t]$ contribuent ; donc

$$d_n(t) = \int_0^{1+t} (n-1)(1-z)^{n-2} dz = 1 - (-t)^{n-1}.$$

Hors de $[-1, 1]$, les supports ne se rencontrent pas, et on choisit la densité nulle. On dispose donc de

$$d_n(t) = \begin{cases} 1 - (-t)^{n-1}, & -1 \leq t < 0, \\ (1-t)^{n-1}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce calcul est valable aussi pour $n = 2$. Puisque $[Z_n = X_n] = [D \geq 0]$ et que D est à densité,

$$\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n}.$$

$$\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2).$$

- b) On a $[T_n = 0] = [Z_n = X_n]$; par a), $\mathbb{P}(T_n = 0) = 1/n > 0$. Une variable aléatoire à densité donne une probabilité nulle à chaque valeur isolée. Il en résulte que

$$T_n \text{ n'est pas une variable aléatoire à densité.}$$

- c) Le minimum et la dernière variable doivent être calculés à partir du *même* échantillon. Dans le tableau Python, la dernière coordonnée porte l'indice $n - 1$.

```
def VarT(n):
    U = rd.random(n)
    return np.min(U) - U[n - 1]
```

$\text{VarT}(n)$ simule $T_n = Z_n - X_n$.

5. Interprétation des histogrammes de T_{500} .

- a) Les valeurs négatives se répartissent sur un intervalle, ce qui suggère que la variable n'est pas discrète. Le calcul précédent permet de le démontrer :

$$T_n = \min(Z_{n-1}, X_n) - X_n = \min(D, 0).$$

Pour chaque $t < 0$, $[T_n = t] = [D = t]$, donc $\mathbb{P}(T_n = t) = 0$ puisque D est à densité. En revanche, $\mathbb{P}(T_n < 0) = 1 - 1/n > 0$. Toute réunion dénombrable de valeurs négatives a donc une probabilité nulle et ne peut représenter toute la partie négative de sa loi.

T_n n'est pas discrète ; elle n'est pas non plus à densité.

Plus précisément, sa loi associe la probabilité $1/n$ au point 0 et, sur $] -1, 0[$, les probabilités d'intervalles sont calculées par la fonction $t \mapsto 1 - (-t)^{n-1}$ issue de a).

- b) Dans 20000 simulations indépendantes de T_{500} , le nombre de valeurs exactement égales à 0 a pour espérance

$$20000 \mathbb{P}(T_{500} = 0) = \frac{20000}{500} = 40.$$

Ce nombre varie selon les simulations. Le dernier rectangle compte aussi des valeurs négatives très proches de 0. Pour un intervalle $[-\delta, 0[$ avec $0 < \delta < 1$, le calcul de la densité de D donne

$$\mathbb{P}(-\delta \leq T_{500} < 0) = \int_{-\delta}^0 (1 - (-t)^{499}) dt = \delta - \frac{\delta^{500}}{500}.$$

Avec 2000 classes couvrant un intervalle de largeur voisine de 1, la largeur d'une classe est approximativement $1/2000$. La contribution moyenne des valeurs négatives à cette dernière classe est donc voisine de $20000/2000 = 10$. En ajoutant les valeurs nulles, l'effectif moyen de la dernière classe est voisin de $40 + 10 = 50$.

Un effectif observé de 51 dans le dernier rectangle est cohérent avec 4.a).

Problème – Préliminaire sur les formes linéaires

Formes linéaires sur un espace vectoriel réel de dimension finie : noyaux, hyperplans, familles libres et représentation par un produit scalaire.

Corrigé – Problème – Préliminaire sur les formes linéaires.**1. Dimension de E^* .**

D'après la formule admise pour la dimension d'un espace d'applications linéaires,

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = n \times 1.$$

Ainsi $\dim E^* = \dim E = n$.

2. Image et noyau d'une forme linéaire.

a) L'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1. Donc

$$\dim \operatorname{Im} \varphi \in \{0, 1\}.$$

b) Si cette dimension vaut 0, l'image est $\{0\}$ et φ est nulle. Si elle vaut 1, l'image est $\mathbb{R}$ et φ est surjective. Ainsi

$$\varphi \text{ est soit nulle, soit surjective.}$$

c) Lorsque $\varphi \neq 0$, son rang vaut 1. Le théorème du rang donne

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - \operatorname{rg} \varphi = n - 1.$$

Son noyau est un sous-espace vectoriel de E , donc

$$\varphi \neq 0 \implies \operatorname{Ker} \varphi \text{ est un hyperplan de } E.$$

Corrigé – Problème – I. Des exemples.**3. Forme linéaire définie par une intégrale.**

Ici, $E = \mathbb{R}_p[x]$ et $\dim E = p + 1$.

a) Tout polynôme est continu sur $[0, 1]$: l'intégrale qui définit $g(P)$ existe donc. Pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale sur ce segment donne

$$g(\alpha P + \beta Q) = \int_0^1 (\alpha P(t) + \beta Q(t)) dt = \alpha g(P) + \beta g(Q).$$

Ainsi $g \in E^*$.

b) Pour le polynôme constant égal à 1, on a $g(1) = 1$. Donc g est non nulle et son rang vaut 1. Par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} g = (p + 1) - 1 = p.$$

c) Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, Q_k appartient à E et

$$g(Q_k) = \int_0^1 \left(t^k - \frac{1}{k+1} \right) dt = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0.$$

Donc les Q_k appartiennent au noyau. Supposons maintenant $\sum_{k=1}^p \alpha_k Q_k = 0$. Alors le polynôme

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k x^k - \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{k+1}$$

est nul. L'identification de ses coefficients de x^k , $1 \leq k \leq p$, donne $\alpha_k = 0$ pour tout k . La famille est donc libre. Elle comporte p vecteurs dans un espace de dimension p , d'où

$$(Q_1, \dots, Q_p) \text{ est une base de } \text{Ker } g.$$

4. Forme linéaire d'évaluation en zéro.

On travaille encore dans $E = \mathbb{R}_p[x]$.

a) Pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = \alpha f(P) + \beta f(Q).$$

Ainsi $f \in E^*$.

b) Si $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$, alors $f(P) = a_0$. Le noyau est donc l'ensemble des polynômes dont le coefficient constant est nul :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(x, x^2, \dots, x^p).$$

La famille $(x, x^2, \dots, x^p)$ est libre par identification des coefficients et forme donc une base de ce noyau, de dimension p .

5. Deux formes linéaires ayant des noyaux emboîtés.

On revient à $\dim E = n$ et l'on suppose f, g non nulles et $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

a) Les deux noyaux ont la même dimension $n - 1$, par la question 2 c). L'inclusion entre deux sous-espaces de même dimension donne

$$\text{Ker } f = \text{Ker } g.$$

b) Comme f n'est pas nulle, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Ainsi

$$\exists x_0 \in E, \quad x_0 \notin \text{Ker } f.$$

Ce vecteur est non nul et, d'après a), $g(x_0) \neq 0$ également.

c) Pour tout $x \in E$, posons

$$\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}, \quad y = x - \alpha x_0.$$

Par linéarité, $f(y) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0$. Ainsi $x = y + \alpha x_0$ avec $y \in \text{Ker } f$, ce qui montre que la somme des deux sous-espaces est E . Si $\alpha x_0 \in \text{Ker } f$, alors $\alpha f(x_0) = 0$; puisque $f(x_0) \neq 0$, cela impose $\alpha = 0$. Leur intersection est donc réduite au vecteur nul, et

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0).$$

- d) La fonction $h = g(x_0)f - f(x_0)g$ est une forme linéaire. Pour $y \in \text{Ker } f = \text{Ker } g$, on a $h(y) = 0$. En outre,

$$h(x_0) = g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0) = 0.$$

Tout vecteur de E s'écrit $y + \alpha x_0$ comme à la question c). Par linéarité, $h(y + \alpha x_0) = 0$. Ainsi

$$\boxed{h = 0.}$$

- e) L'égalité précédente s'écrit $g(x_0)f = f(x_0)g$. Comme $f(x_0) \neq 0$,

$$\boxed{g = \lambda f, \quad \lambda = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} \neq 0.}$$

Les deux formes linéaires sont donc proportionnelles.

Corrigé – Problème – II. Hyperplans et formes linéaires.

6. Construction d'une forme linéaire de noyau donné.

- a) La base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H est une famille libre de E . Le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base de E . Comme $\dim E = n$, un seul vecteur supplémentaire est nécessaire :

$$\boxed{\exists e_n \in E, \quad \beta = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E.}$$

- b) Les images des vecteurs d'une base déterminent une unique application linéaire. Plus explicitement, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, définissons $\varphi(x) = x_n$. L'unicité des coordonnées rend cette définition correcte ; la linéarité des coordonnées montre que φ est linéaire. Elle prend bien les valeurs 0 sur les e_i avec $i < n$ et 1 sur e_n . Enfin, $\varphi(x) = 0$ équivaut à $x_n = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$. Ainsi

$$\boxed{\varphi \in E^*, \quad \varphi \neq 0, \quad \text{Ker } \varphi = H.}$$

7. Noyau de l'application à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f &\iff (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0) \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) = 0 \\ &\iff x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i.}$$

8. Surjectivité de f et liberté des formes linéaires.

On suppose $f : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ surjective.

- a) Tout élément de $\mathbb{R}^p$ admet un antécédent par une application surjective. En particulier,

$$\boxed{\exists x \in E, \quad f(x) = \varepsilon_1.}$$

Cela signifie $f_1(x) = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $i \neq 1$.

- b) Supposons $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la surjectivité fournit un vecteur $x_j \in E$ tel que $f(x_j) = \varepsilon_j$. Alors $f_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. En évaluant la relation en x_j , on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x_j) = \lambda_j.$$

Cela vaut pour tous les indices j , donc tous les coefficients sont nuls et

$$(f_1, \dots, f_p) \text{ est une famille libre de } E^*.$$

9. Défaut de surjectivité de f et relation linéaire.

On suppose que f n'est pas surjective.

- a) Son image est alors un sous-espace strict de $\mathbb{R}^p$, donc

$$0 \leq m = \dim \operatorname{Im} f \leq p - 1.$$

- b) Complétons une base $(e_1, \dots, e_m)$ de l'image en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Si $m = 0$, on part de la famille vide, et on choisit simplement une base de $\mathbb{R}^p$. Le sous-espace $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ est de dimension $p - 1$. Comme $m \leq p - 1$, il contient $\operatorname{Im} f$. Ainsi

$$\operatorname{Im} f \subset H, \quad H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^p.$$

- c) Appliquons la question 6 à l'espace $\mathbb{R}^p$ et à son hyperplan H . Il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dont le noyau est H . Posons $\lambda_i = \varphi(\varepsilon_i)$, où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est la base canonique. Pour $y = (y_1, \dots, y_p) = \sum_i y_i \varepsilon_i$, la linéarité donne

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i.$$

Les λ_i ne sont pas tous nuls, car sinon φ serait nulle sur une base et donc sur tout l'espace. Comme $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset H = \operatorname{Ker} \varphi$ pour tout $x \in E$,

$$0 = \varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x).$$

C'est une relation linéaire non triviale entre les f_i , donc

$$(f_1, \dots, f_p) \text{ est une famille liée de } E^*.$$

10. Dimension d'une intersection de noyaux.

On suppose maintenant $(f_1, \dots, f_p)$ libre.

- a) Si f n'était pas surjective, la question 9 montrerait que cette famille est liée, contradiction. Ainsi

$$f \text{ est surjective.}$$

- b) Son rang vaut donc p . Le théorème du rang et la question 7 donnent

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} f_i \right) = \dim \operatorname{Ker} f = n - p.$$

En particulier, les hypothèses imposent $p \leq n$, comme le montre aussi la liberté d'une famille de p vecteurs dans E^* , de dimension n .

Corrigé – Problème – III. Formes linéaires et structure euclidienne.

11. Forme linéaire associée à un vecteur.

- a) Soit $a \in E$. La bilinéarité du produit scalaire donne, pour $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f_a(\alpha x + \beta y) = \langle a, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle a, x \rangle + \beta \langle a, y \rangle = \alpha f_a(x) + \beta f_a(y).$$

Donc $f_a \in E^*$.

- b) Par définition,

$$\text{Ker } f_a = \{x \in E : \langle a, x \rangle = 0\}.$$

C'est l'orthogonal du sous-espace engendré par a :

$$\text{Ker } f_a = \text{Vect}(a)^\perp.$$

Si $a = 0_E$, ce noyau est E ; si $a \neq 0_E$, il est un hyperplan, puisque $f_a(a) = \|a\|^2 > 0$ et que la question 2 s'applique.

- c) Si f_a est nulle, en l'évaluant en a on obtient $0 = f_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2$. Le caractère défini du produit scalaire impose donc

$$f_a = 0 \implies a = 0_E.$$

12. Représentation de toute forme linéaire par un produit scalaire.

- a) Pour $a, b, x \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha a + \beta b)(x) &= \langle \alpha a + \beta b, x \rangle \\ &= \alpha \langle a, x \rangle + \beta \langle b, x \rangle = (\alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b))(x). \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout x , on a

$$\Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b); \quad \Phi \text{ est linéaire.}$$

- b) Si $a \in \text{Ker } \Phi$, alors $f_a = 0$, donc $a = 0_E$ par la question 11 c). Ainsi Φ est injective. Or E et E^* ont la même dimension finie n , d'après la question 1. Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie est bijective. Par conséquent,

$$\Phi : E \longrightarrow E^* \text{ est un isomorphisme.}$$

- c) Pour $\varphi \in E^*$, la bijectivité de Φ fournit un unique antécédent $a \in E$. L'égalité $\Phi(a) = \varphi$ signifie

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E, \\ \forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle. \end{aligned}$$

Ce résultat a donc été démontré à partir de l'injectivité de Φ et de l'égalité des dimensions.

13. Application à l'espace des matrices.

Dans cette question, on prend $E = M_p(\mathbb{R})$. C'est cet espace que désigne le symbole E dans la question 13 b).

a) Écrivons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. D'après la formule du produit matriciel,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}({}^tA)B &= \sum_{i=1}^p ({}^tA)_{ii} B_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ji} b_{ji} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij}. \end{aligned}$$

Cette expression est bilinéaire et symétrique en A, B . De plus,

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \geq 0,$$

et cette somme est nulle si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls, c'est-à-dire $A = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \operatorname{tr}({}^tA)B = \sum_{i,j=1}^p a_{ij} b_{ij} \\ &\text{est un produit scalaire sur } M_p(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

b) Soit $\varphi : M_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. L'espace $M_p(\mathbb{R})$ est euclidien pour le produit scalaire précédent et de dimension finie p^2 . La représentation démontrée à la question 12 donne une matrice $S \in M_p(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice M ,

$$\varphi(M) = \langle S, M \rangle = \operatorname{tr}({}^tS)M.$$

En posant $A = {}^tS$, on obtient exactement la forme demandée :

$$\boxed{\exists A \in M_p(\mathbb{R}), \quad \forall M \in M_p(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).}$$