

HEC–ESSEC – Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2023

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Partie I – Questions préliminaires

On calcule les moments des lois uniforme et exponentielle. Dans les parties suivantes, u_k représente le moment d'ordre k d'une variable à densité continue sur l'intervalle considéré, nulle en dehors.

Corrigé – Partie I – Questions préliminaires.

1. Moments de tout ordre.

a) Pour X uniforme sur $[0, 1]$, $|X|^k \leq 1$ presque sûrement. Le moment existe et

$$m_k(X) = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

b) Pour X exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, la continuité en zéro et les croissances comparées assurent la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$: à l'infini, $x^{k+2}e^{-\lambda x} \rightarrow 0$, donc l'intégrande est majoré par une constante fois x^{-2} . Sur $[0, A]$, on intègre par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $a(x) = x^k$ et $b(x) = -e^{-\lambda x}$, de dérivées kx^{k-1} et $\lambda e^{-\lambda x}$. Pour $k \geq 1$, puis $A \rightarrow +\infty$,

$$m_k(X) = \frac{k}{\lambda} m_{k-1}(X).$$

Le terme de bord tend vers zéro. Comme $m_0(X) = 1$, une récurrence donne

$$m_k(X) = \frac{k!}{\lambda^k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Partie II – Le problème de Stieltjes

X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité adaptée f , et $u_k = \mathbb{E}(X^k)$. On pose $(H_n)_{ij} = u_{i+j-2}$, $(G_n)_{ij} = u_{i+j-1}$ et $g(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$ pour $x \geq 0$.

Corrigé – Partie II – Le problème de Stieltjes.**II.1 – Conditions nécessaires d'existence****2. Matrices d'ordre trois.**

$$H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}.$$

3. Forme quadratique associée à H_n .

La multiplication matricielle donne

$${}^tW H_n W = \sum_{i=1}^n \alpha_i (H_n W)_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}.$$

Chaque moment est fini. Une somme finie peut être passée sous l'intégrale, et

$$\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} \right)^2 = P(x)^2.$$

Ainsi

$${}^tW H_n W = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2} = \int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x) dx.$$

4. Valeurs propres de H_n .

La matrice H_n est symétrique réelle. Le théorème spectral assure que ses valeurs propres sont réelles. Si $H_n W = \mu W$, $W \neq 0$, alors

$$\mu \|W\|^2 = {}^tW H_n W \geq 0.$$

On peut même obtenir la stricte positivité. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive ou nulle et d'intégrale un, elle est strictement positive sur un intervalle ouvert inclus dans $]0, +\infty[$. Le polynôme non nul P n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc un sous-intervalle sur lequel $P^2 f > 0$, d'où une intégrale strictement positive. Ainsi

toutes les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

5. Valeurs propres de G_n .

Les mêmes calculs donnent

$${}^tW G_n W = \int_0^{+\infty} x P(x)^2 f(x) dx.$$

Pour $W \neq 0$, l'intégrande est strictement positif sur un intervalle de $]0, +\infty[$ par le raisonnement précédent. G_n est symétrique réelle et, pour tout vecteur propre non nul, $\mu \|W\|^2 > 0$. Donc

toutes les valeurs propres de G_n sont strictement positives.

6. Borne inférieure du troisième moment.

On a $u_1 = 1/2$ et $u_2 = 1/3$. D'après la question 5, les valeurs propres de la matrice symétrique

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & u_3 \end{pmatrix}$$

sont positives. Le théorème spectral donne donc ${}^tWG_2W \geq 0$ pour tout $W \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. En prenant $W = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$0 \leq \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + u_3 = u_3 - \frac{2}{9}.$$

Ainsi

$$u_3 \geq \frac{2}{9}.$$

7. Une condition de divergence.

a) Pour $n \geq 1$, la fonction $\varphi(t) = t^n e^{-t^\theta}$ est continue en zéro et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\varphi'(t) = t^{n-1} e^{-t^\theta} (n - \theta t^\theta).$$

Elle croît jusqu'à $t = (n/\theta)^{1/\theta}$ puis décroît, ce qui donne

$$0 \leq t^n e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}.$$

b) Posons $A = \int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt$, fini et strictement positif. Alors

$$0 < u_n \leq A \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}, \quad u_n^{-\theta/n} \geq A^{-\theta/n} \frac{\theta e}{n}.$$

Comme $A^{-\theta/n} \rightarrow 1$, pour tout n assez grand, $u_n^{-\theta/n} \geq \theta e/(2n)$. La série harmonique diverge ; par comparaison de séries positives,

$$\sum_{n \geq 1} u_n^{-\theta/n} \text{ diverge.}$$

8. Test de Stieltjes.

Avec $m = 1 + \lfloor N/2 \rfloor$, l'indice maximal requis est $2m - 2 \leq N$. Les matrices $H_1, \dots, H_m$ sont les sous-matrices principales supérieures gauches de H_m . Si les valeurs propres de H_m sont positives ou nulles, le théorème spectral donne ${}^tWH_mW \geq 0$ pour tout W ; en complétant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par des zéros, on obtient la même propriété pour H_n . La réciproque est immédiate puisque $n = m$ est testé.

On remplit les coefficients de H_m par $\mathbb{H}[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = u_{i+j}$, les indices Python commençant à zéro :

```

import numpy as np
import numpy.linalg as al

def test_stieltjes(U):
    N = len(U)-1
    m = 1+N//2
    H = np.zeros((m,m))
    for i in range(0,m):
        for j in range(0,m):
            H[i,j] = U[i+j]
    valp = al.eigvalsh(H)
    for k in range(0,m):
        if valp[k] < 0:
            return 0
    return 1

```

Le test porte ici sur des valeurs propres positives au sens large ; pour exiger la stricte positivité prouvée en question 4, remplacer < 0 par ≤ 0 . Un calcul numérique proche de zéro doit être interprété avec prudence.

Le test de H_m équivaut aux tests de $H_1, \dots, H_m$.

Corrigé – Partie II – Non-unicité des solutions.

II.2 – Construction de densités ayant les mêmes moments

9. Existence des intégrales.

Les deux intégrandes sont continues sur $[0, +\infty[$ et leurs valeurs absolues sont majorées par $t^n e^{-t}$. Par la question 1, l'intégrale de ce majorant converge et vaut $n!$. Ainsi

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin t \, dt \quad \text{et} \quad T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos t \, dt \text{ existent.}$$

10. Calcul de S_0 .

Sur $[0, A]$, les fonctions $a(t) = \sin t$ et $b(t) = -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $\cos t$ et e^{-t} . L'intégration par parties donne, puis le passage à la limite,

$$S_0 = [-e^{-t} \sin t]_0^{+\infty} + T_0 = T_0.$$

La même opération avec $a(t) = \cos t$, $a'(t) = -\sin t$, et $b(t) = -e^{-t}$ donne $T_0 = 1 - S_0$. Les termes de bord à l'infini sont nuls. Donc

$$S_0 = T_0 = \frac{1}{2}, \quad V_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Relations de récurrence.

Sur $[0, A]$, on prend $a(t) = t^{n+1} e^{-t}$, de dérivée $((n+1)t^n - t^{n+1})e^{-t}$, et $b(t) = \sin t$, de dérivée $\cos t$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$. L'IPP, puis $A \rightarrow +\infty$, donne

$$T_{n+1} = -(n+1)S_n + S_{n+1}.$$

Le terme de bord est nul en zéro et tend vers zéro à l'infini par croissances comparées. Avec le même a et $b(t) = -\cos t$, $b'(t) = \sin t$, on obtient de même

$$S_{n+1} = (n+1)T_n - T_{n+1}.$$

On obtient les deux relations demandées :

$$S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n, \quad S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1)S_n.$$

12. Récurrence matricielle.

En additionnant et soustrayant les deux relations précédentes,

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(S_n + T_n), \quad T_{n+1} = \frac{n+1}{2}(-S_n + T_n).$$

Sous forme matricielle :

$$V_{n+1} = (n+1)MV_n, \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Expression de V_n .

Pour $n = 0$, l'égalité est immédiate. Si $V_n = n!M^nV_0$, la relation précédente donne $V_{n+1} = (n+1)n!M^{n+1}V_0$. Par récurrence,

$$V_n = n!M^nV_0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

14. Calcul de M^4 et annulation de S_{4n+3} .

Des produits directs donnent

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^4 = -\frac{1}{4}I_2.$$

De plus $M^3V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$, donc

$$V_{4n+3} = (4n+3)! \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \quad S_{4n+3} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

15. Moments nuls de g .

Le changement $x = t^4$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même, de dérivée $4t^3 > 0$. Sur les segments $[a, b]$ avec $0 < a < b$, la formule de changement de variable donne

$$\int_{a^4}^{b^4} x^n e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4}) dx = 4 \int_a^b t^{4n+3} e^{-t} \sin t dt.$$

Les deux intégrales impropres ont la même nature. La seconde converge absolument par la question 9. Le passage $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow +\infty$ donne

$$\int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 4S_{4n+3} = 0.$$

16. Deux fonctions positives distinctes.

Posons, pour $x \geq 0$,

$$g_1(x) = e^{-x^{1/4}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin(x^{1/4}) \right), \quad g_2(x) = e^{-x^{1/4}}.$$

Elles sont continues et strictement positives puisque $1 + \frac{1}{2} \sin t \geq 1/2$. Elles diffèrent, par exemple en $x = (\pi/2)^4$. Le même changement de variable, avec les mêmes justifications, donne

$$\int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx = 4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} dt = 4(4n+3)!.$$

Comme $0 < g_1 \leq (3/2)g_2$, tous ses moments existent. Par la question 15,

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx = 4(4n+3)!.$$

17. Conclusion pour le problème de Stieltjes.

En particulier les deux intégrales d'ordre zéro valent 24. Les fonctions $f_i = g_i/24$ sur $\mathbb{R}_+$, prolongées par zéro sur $] -\infty, 0[$, sont positives, continues sauf éventuellement en zéro, et d'intégrale un. Elles sont donc des densités, avec restriction continue à $\mathbb{R}_+$. Elles ont tous les moments

$$u_n = \frac{(4n+3)!}{6} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad u_0 = 1.$$

Elles définissent deux lois différentes : leur différence est strictement positive sur un petit intervalle autour de $(\pi/2)^4$, donc les probabilités de cet intervalle diffèrent. Ainsi

$$\mathcal{M}^*(\mathbb{R}_+) \text{ peut admettre plusieurs solutions de lois différentes.}$$

Partie III – Le problème de Hausdorff

Conditions nécessaires pour des moments sur $[0, 1]$, test numérique, unicité des densités de classe $\mathcal{C}^1$ et étude d'une famille de densités exponentielles.

Corrigé – Partie III – Le problème de Hausdorff.**III.1 – Une condition nécessaire d'existence****18. Positivité des moments.**

La densité f est positive ou nulle et continue sur $[0, 1]$, avec $\int_0^1 f(t) dt = 1$. Il existe donc un point $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) > 0$: sinon f serait nulle sur $]0, 1[$ et son intégrale serait nulle. Par continuité, on peut choisir un segment $[b, c] \subset]0, 1[$ et un réel $\eta > 0$ tels que $f(t) \geq \eta$ pour tout $t \in [b, c]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le moment existe puisque $0 \leq X \leq 1$ presque sûrement, et

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \geq \eta \int_b^c t^n dt > 0.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$

19. Différences alternées de moments.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, la linéarité d'une somme finie et la formule du binôme donnent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} &= \int_0^1 t^i \left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-t)^k \right) f(t) dt \\ &= \int_0^1 t^i (1-t)^j f(t) dt. \end{aligned}$$

Sur le segment $[b, c]$ de la question précédente, le facteur $t^i(1-t)^j$ est strictement positif. L'intégrale est donc strictement positive, d'où

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0.$$

20. Encadrement du troisième moment.

En appliquant la question 19 avec $(i, j) = (2, 1)$, on obtient

$$u_2 - u_3 > 0, \quad \text{donc} \quad u_3 < \frac{1}{3}.$$

Avec $(i, j) = (1, 2)$, on obtient

$$u_1 - 2u_2 + u_3 > 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + u_3 > 0, \quad u_3 > \frac{1}{6}.$$

On obtient l'encadrement demandé :

$$u_3 \in \left] \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right[.$$

21. Convergence d'une série de moments.

La fonction f , continue sur le segment $[0, 1]$, est bornée : il existe $M > 0$ tel que $0 \leq f(t) \leq M$ sur ce segment. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{M}{n^{1+\alpha}}.$$

Lorsque $\alpha > 0$, la série de Riemann de terme général $n^{-(1+\alpha)}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\forall \alpha > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

Pour $\alpha = 0$, cela n'est plus vrai en général : la loi uniforme sur $[0, 1]$, dont la densité adaptée vaut 1 sur $[0, 1]$, donne $u_n = 1/(n+1)$. La série correspondante est une série harmonique décalée et diverge. Ainsi

$$\text{L'affirmation pour } \alpha = 0 \text{ est fausse en général.}$$

Corrigé – Partie III – Test de Hausdorff.

III.2 – Un test en langage Python

22. Première colonne.

Lorsque $j = 0$, la somme définissant $\Delta_{n,j}$ n'a qu'un terme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{n,0} = u_n.}$$

23. Relation de récurrence.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par la formule de Pascal, avec la convention $\binom{j}{k} = 0$ si $k \notin \llbracket 0, j \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1,j+1} &= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j} \\ &= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} u_{n+k-j} \\ &= \Delta_{n,j} - \sum_{\ell=0}^j (-1)^\ell \binom{j}{\ell} u_{n+1+\ell-j}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}.}$$

Cette identité algébrique est valable pour toute suite (u_n) , même si celle-ci n'est pas une suite de moments.

24. Programme complété.

La première colonne contient les moments. Dans une ligne k , les autres coefficients se calculent de gauche à droite grâce à $\Delta_{k,j} = \Delta_{k-1,j-1} - \Delta_{k,j-1}$.

```
import numpy as np
```

```
def test_hausdorff(U):
    N = len(U)-1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(0, N+1):
        Delta[k, 0] = U[k]
        if (Delta[k, 0] <= 0) and (info == -1):
            info = k
        for j in range(1, k+1):
            Delta[k, j] = Delta[k-1, j-1]-Delta[k, j-1]
            if (Delta[k, j] <= 0) and (info == -1):
                info = k
    return (info, Delta)
```

Le test utilise ≤ 0 puisque la condition demandée est une stricte positivité. La variable `info` n'est modifiée que lorsqu'elle vaut encore -1 : elle conserve donc le premier ordre qui échoue. Le calcul continue ensuite pour compléter toute la matrice. Les cases situées au-dessus de la diagonale restent nulles.

$$\boxed{\text{info} = -1 \text{ si tous les tests réussissent ;} \\ \text{sinon, c'est le premier ordre d'échec.}}$$

25. Résultats de test3.

On exécute successivement le test sur les moments de la loi uniforme, puis sur le tableau où le terme d'indice 3 est remplacé par 0,16 :

```
def test3():
    N = 10
    U = np.zeros(N+1)
    for k in range(0,N+1):
        U[k] = 1.0/(k+1)
    V = test_hausdorff(U)
    U[3] = 0.16
    W = test_hausdorff(U)
    return V,W
```

Pour le tableau initial, $u_k = 1/(k+1)$ correspond à la loi uniforme sur $[0, 1]$. La question 19 montre que tous les coefficients testés sont strictement positifs, donc $V[0] = -1$.

Pour le second appel, $u_3 = 0,16 = 4/25$, tandis que u_0, u_1, u_2 restent égaux à $1, 1/2, 1/3$. Les lignes d'ordres 0, 1, 2 sont inchangées et vérifient la condition. À l'ordre 3,

$$\Delta_{3,0} = \frac{4}{25} > 0, \quad \Delta_{3,1} = \frac{1}{3} - \frac{4}{25} = \frac{13}{75} > 0,$$

mais

$$\Delta_{3,2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{4}{25} = -\frac{1}{150} < 0.$$

La condition échoue donc pour la première fois à l'ordre 3 :

$$\boxed{V[0] = -1, \quad W[0] = 3.}$$

III.3 – Unicité des solutions à densité de classe $\mathcal{C}^1$ **26. Contrôle des différences de valeurs de h .**

La fonction $h = f_2 - f_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Sa dérivée y est donc continue et bornée. Posons

$$K = \max_{t \in [0,1]} |h'(t)| \geq 0.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [0, 1]$,

$$\boxed{|h(x) - h(y)| \leq K|x - y|.}$$

27. Deux majorations probabilistes.

- a) Comme $Z_n = Y/n$ prend un nombre fini de valeurs dans $[0, 1]$, toutes les espérances suivantes existent. En écrivant explicitement l'espérance,

$$\begin{aligned} |h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| &= \left| \sum_{k=0}^n (h(x) - h(k/n)) \mathbb{P}(Y = k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |h(x) - h(k/n)| \mathbb{P}(Y = k) \\ &\leq K \sum_{k=0}^n |x - k/n| \mathbb{P}(Y = k). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K \mathbb{E}(|Z_n - x|).}$$

b) Posons $A = |Z_n - x|$. La variance de A est positive ou nulle, donc

$$0 \leq \mathbb{V}(A) = \mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}(A)^2.$$

Comme $\mathbb{E}(A) \geq 0$, on en déduit $\mathbb{E}(|Z_n - x|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}$. Avec la question précédente,

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K \sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.$$

28. Approximation par les polynômes $\hat{h}_n$.

Pour $x \in]0, 1[$, choisissons Y de loi binomiale de paramètres n, x . Alors

$$\mathbb{E}(h(Y/n)) = \sum_{k=0}^n h(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \hat{h}_n(x).$$

De plus, $\mathbb{E}(Y) = nx$ et $\mathbb{V}(Y) = nx(1-x)$, d'où

$$\mathbb{E}(Z_n) = x, \quad \mathbb{E}((Z_n - x)^2) = \mathbb{V}(Z_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Le résultat de la question 27 donne alors la première inégalité cherchée. Pour $x = 0$ ou $x = 1$, on prend respectivement $Y = 0$ ou $Y = n$ avec probabilité 1 : $\hat{h}_n(x) = h(x)$, et cette même inégalité reste vraie. Enfin, $x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1, \quad |h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Intégrale du produit $\hat{h}_n h$.

Les deux solutions ont les mêmes moments. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^m h(x) \, dx = \int_0^1 x^m f_2(x) \, dx - \int_0^1 x^m f_1(x) \, dx = u_m - u_m = 0.$$

Or $\hat{h}_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . On peut donc l'écrire sous la forme $\hat{h}_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$. Par linéarité d'une somme finie,

$$\int_0^1 \hat{h}_n(x) h(x) \, dx = \sum_{m=0}^n a_m \int_0^1 x^m h(x) \, dx = 0.$$

30. Majoration de l'intégrale de h^2 .

Grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 h(x)^2 \, dx = \int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x)) h(x) \, dx \\ &\leq \int_0^1 |h(x) - \hat{h}_n(x)| |h(x)| \, dx \\ &\leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Toutes ces intégrales existent par continuité sur $[0, 1]$. On obtient donc

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^1 h(x)^2 \, dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| \, dx.$$

31. Conclusion d'unicité.

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement,

$$\int_0^1 h(x)^2 dx = 0.$$

La fonction h^2 est continue et positive ou nulle sur $[0, 1]$. Si elle était strictement positive en un point, sa continuité fournirait un intervalle de longueur strictement positive où elle est minorée par un réel strictement positif, ce qui rendrait son intégrale strictement positive. Ainsi $h = 0$ sur $[0, 1]$. Les densités adaptées étant toutes deux nulles hors de cet intervalle,

$$f_1 = f_2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{M}^*([0, 1]) \text{ admet au plus une loi solution dont la densité adaptée est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1].$$

C'est la loi qui est unique ; deux variables aléatoires distinctes peuvent avoir cette même loi.

III.4 – Problème de Hausdorff tronqué**32. Une majoration du reste de l'exponentielle.**

Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à l'exponentielle entre 0 et x donne un réel c entre ces deux points tel que

$$e^x - 1 - x = \frac{e^c}{2} x^2.$$

Comme $c \in [-1, 1]$, ce reste est positif ou nul et inférieur ou égal à $(e/2)x^2$. Pour $x = 0$, les deux membres sont nuls. On peut donc choisir

$$C = \frac{e}{2} > 0, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq Cx^2.$$

33. Dérivées des fonctions R_k et F_k .

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Les fonctions intégrées dans $R_k(a, b)$ sont continues sur $[0, 1]$; ces intégrales sont donc finies. De plus, $R_0(a, b) > 0$ car son intégrande est strictement positif.

a) Pour $0 < |\varepsilon| \leq 1$, on écrit exactement

$$\begin{aligned} R_k(a + \varepsilon, b) - R_k(a, b) - \varepsilon R_{k+1}(a, b) \\ = \int_0^1 t^k e^{at+bt^2} (e^{\varepsilon t} - 1 - \varepsilon t) dt. \end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon t \in [-1, 1]$, la question 32 entraîne

$$0 \leq R_k(a + \varepsilon, b) - R_k(a, b) - \varepsilon R_{k+1}(a, b) \leq C\varepsilon^2 R_{k+2}(a, b).$$

En divisant par $|\varepsilon|$, on obtient

$$\left| \frac{R_k(a + \varepsilon, b) - R_k(a, b)}{\varepsilon} - R_{k+1}(a, b) \right| \leq C|\varepsilon| R_{k+2}(a, b) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Cela prouve directement, sans dériver sous le signe intégral, que

$$\partial_1 R_k(a, b) = R_{k+1}(a, b).$$

- b) On dispose aussi de la formule admise $\partial_2 R_k = R_{k+2}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on dérive le quotient R_k/R_0 en ne faisant varier que sa i -ième variable :

$$\partial_i F_k = \frac{R_{k+i}R_0 - R_k R_i}{R_0^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2\}, \quad \partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i.}$$

- c) Toutes les fonctions ci-dessous sont évaluées au point (a, b) . En développant le produit puis en utilisant la définition des R_j , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_0} \int_0^1 (t^i - F_i)(t^k - F_k) e^{at+bt^2} dt \\ &= \frac{R_{k+i} - F_k R_i - F_i R_k + F_i F_k R_0}{R_0} \\ &= F_{k+i} - F_k F_i - F_i F_k + F_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\partial_i F_k(a, b) = \frac{1}{R_0(a, b)} \int_0^1 (t^i - F_i(a, b))(t^k - F_k(a, b)) e^{at+bt^2} dt.}$$

34. Hessienne et minimum local de G .

La continuité admise des R_j et les formules de la question 33 montrent que leurs dérivées partielles sont continues. Les dérivées partielles des F_k sont donc également continues. En dérivant G par rapport à chacune de ses variables, l'autre étant fixée, on trouve

$$\partial_1 G = F_1 - u_1, \quad \partial_2 G = F_2 - u_2.$$

Cela montre en particulier que G est de classe $\mathcal{C}^2$.

- a) La matrice hessienne s'écrit

$$\boxed{\nabla^2 G = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 - F_1^2 & F_3 - F_1 F_2 \\ F_3 - F_1 F_2 & F_4 - F_2^2 \end{pmatrix}.}$$

En particulier, elle est réelle symétrique.

- b) Fixons (a, b) et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0$. En utilisant les formules intégrales de la question 33, puis en regroupant les termes du carré,

$${}^t v \nabla^2 G(a, b) v = \frac{1}{R_0(a, b)} \int_0^1 \left[v_1(t - F_1(a, b)) + v_2(t^2 - F_2(a, b)) \right]^2 e^{at+bt^2} dt.$$

Cette intégrale est positive ou nulle. Si elle était nulle, son intégrande, continu et positif ou nul, serait nul sur $[0, 1]$. Comme l'exponentielle est strictement positive, le polynôme

$$Q(t) = v_1 t + v_2 t^2 - v_1 F_1(a, b) - v_2 F_2(a, b)$$

serait nul en tout point de $[0, 1]$. Un polynôme nul sur un intervalle est le polynôme nul : ses coefficients de t et de t^2 seraient donc $v_1 = v_2 = 0$, contradiction. On en déduit

$$\boxed{\forall v \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^t v \nabla^2 G(a, b) v > 0.}$$

- c) Soit λ une valeur propre de la hessienne et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$0 < {}^t v \nabla^2 G(a, b) v = \lambda {}^t v v = \lambda \|v\|^2.$$

Puisque $\|v\|^2 > 0$, on conclut que

Toutes les valeurs propres de $\nabla^2 G(a, b)$ sont strictement positives.

- d) Notons (a, b) les paramètres de la densité solution indiquée dans l'énoncé. Ses moments d'ordres 1 et 2 donnent

$$u_1 = \frac{1}{R_0(a, b)} \int_0^1 t e^{at+bt^2} dt = F_1(a, b),$$

$$u_2 = \frac{1}{R_0(a, b)} \int_0^1 t^2 e^{at+bt^2} dt = F_2(a, b).$$

Ainsi $\nabla G(a, b) = 0$. Ce point critique possède une hessienne dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Le critère du second ordre, applicable puisque G est de classe $\mathcal{C}^2$, donne donc

G admet un minimum local strict en $(a, b) = (\alpha_1, \alpha_2)$.