

HEC Paris – ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2023

Table des matières

1	Partie I : questions préliminaires, problème des moments	2
	<i>Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées.</i>	<i>2</i>
2	Partie II : le problème de Stieltjes	2
	<i>Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées ; réduction ; Python. . . .</i>	<i>2</i>
3	Partie III : le problème de Hausdorff	4
	<i>Thèmes abordés : variables à densité ; suites ; fonctions de plusieurs variables ; Python.</i>	<i>4</i>

Notations. Dans tout le texte, $\llbracket 0, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k vérifiant $0 \leq k \leq n$. Si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes, $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ et I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. La transposée de A est notée tA . Si $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|V\|$ désigne sa norme euclidienne. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé. Pour une variable aléatoire réelle X , on note $m_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$ son moment d'ordre k , lorsqu'il existe, et $m_0(X) = 1$. Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, ∇g et $\nabla^2 g$ désignent son gradient et sa matrice hessienne. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ si $x > 0$ et $0^\alpha = 0$. Enfin, $f|_J$ désigne la restriction de f à l'intervalle J .

1 Partie I : questions préliminaires, problème des moments

Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

1. Montrer que, dans les cas suivants, X admet des moments de tout ordre et déterminer ces moments :
 - a) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite, on se donne une suite de réels $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et un intervalle J de $\mathbb{R}$. On considère le problème des moments, noté $\mathcal{M}^*(J)$: trouver une variable aléatoire réelle X vérifiant les trois conditions suivantes :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et $m_k(X) = u_k$;
- X admet une densité f , avec $f|_J$ continue sur J ;
- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus J$, $f(x) = 0$.

Si X est une solution et f une densité vérifiant ces points, f est dite adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$. On s'intéresse aux deux cas $J = \mathbb{R}_+$, appelé problème de Stieltjes, et $J = [0, 1]$, appelé problème de Hausdorff.

2 Partie II : le problème de Stieltjes

Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées ; réduction ; Python.

II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On suppose que le problème $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}_+)$ admet une solution X , de densité adaptée f . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n et G_n les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ définies par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}, \quad (G_n)_{i,j} = u_{i+j-1}.$$

2. Écrire explicitement H_3 et G_3 en fonction de $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $W = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$${}^tW H_n W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2} \tag{1}$$

puis que

$${}^tW H_n W = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx, \quad (2)$$

où $P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de H_n sont positives.
5. Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de G_n sont positives.
6. On suppose uniquement dans cette question que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{2}{3}$. Montrer que nécessairement $u_3 \geq \frac{2}{9}$.
7. On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $\theta > 0$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(t^\theta) dt$ converge.
 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t^n \exp(-t^\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right).$$

- b) En déduire que la série de terme général $(u_n)^{-\theta/n}$ diverge.
8. **Python.** Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N^* = 1 + \lfloor N/2 \rfloor$. On souhaite vérifier numériquement la condition

$$\forall n \in \llbracket 0, N^* \rrbracket, \quad \text{toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives} \quad (\text{CS}_N).$$

La fonction suivante prend en entrée un tableau unidimensionnel U contenant $u_0, \dots, u_N$. Compléter les pointillés pour qu'elle renvoie 1 si (CS_N) est satisfaite et 0 sinon. La fonction `eigvalsh()` de `numpy.linalg` renvoie les valeurs propres d'une matrice symétrique.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def test_stieltjes(U):
    N=len(U)-1
    m=1+N//2
    H=np.zeros((m,m))
    for i in range(____,____):
        H[i,m-1]=U[i+m-1]
        H[m-1,i]=_____
    valp=al.eigvalsh(H)
    for k in range(0,____):
        if(_____):
            return ____
    return ____
```

II.2) Non unicité des solutions

On définit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(-x^{1/4}) \sin(x^{1/4})$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ existent. On convient que $t^0 = 1$.

On pose $S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$, $T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ et $V_n = \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix}$.

10. Montrer que $S_0 = \frac{1}{2}$. On admet que $T_0 = S_0$.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n, \quad (3)$$

$$S_{n+1} - T_{n+1} = -(n+1)S_n. \quad (4)$$

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = (n+1)MV_n, \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = n!M^n V_0$.

14. Calculer M^4 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{4n+3} = 0$.

15. En utilisant le changement de variable $x = t^4$, dont on justifiera la validité, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 0. \quad (5)$$

16. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2 positives, distinctes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx \quad (6)$$

existent et sont égales.

17. Que peut-on conclure par rapport au problème $\mathcal{M}^*(J)$ quand $J = [0, +\infty[$?

3 Partie III : le problème de Hausdorff

Thèmes abordés : variables à densité ; suites ; fonctions de plusieurs variables ; Python.

Dans toute cette partie, $J = [0, 1]$.

III.1) Une condition nécessaire d'existence

On suppose que le problème $\mathcal{M}^*([0, 1])$ admet une solution, notée à nouveau X , et f désigne une densité adaptée.

18. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

19. Plus généralement, montrer que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0. \quad (7)$$

20. On suppose uniquement dans cette question que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{3}$. Montrer que $u_3 \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

21. Revenir au cas général. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général u_n/n^α ($n \geq 1$) est convergente. Cette affirmation reste-t-elle vraie quand $\alpha = 0$?

III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}. \quad (8)$$

La condition (7) est dite vraie à l'ordre n si $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta_{n,j} > 0$. (9)

22. Exprimer $\Delta_{n,0}$ en fonction de u_n .

23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}. \quad (10)$$

24. **Python.** La fonction suivante, dont l'entrée est un tableau U contenant $u_0, \dots, u_N$, doit renvoyer un couple $(\text{info}, \text{Delta})$: info vaut -1 si la condition est satisfaite à tout ordre de $\llbracket 0, N \rrbracket$, et sinon le plus petit ordre où elle ne l'est pas ; Delta est une matrice de taille $(N+1) \times (N+1)$ contenant les $\Delta_{n,j}$, avec $\Delta_{n,j} = 0$ si $j > n$. Compléter les pointillés.

```
import numpy as np

def test_hausdorff(U):
    N=len(U)-1
    Delta=np.zeros((N+1,N+1))
    info=-1
    for k in range(____,____):
        Delta[k,0]=U[____]
        if ( (____) and (info== -1) ):
            info=k
        for j in range(____,____):
            Delta[k,j]=_____
            if ( (____) and (info== -1) ):
                info=_____
    return (info, Delta)
```

25. **Python.** On considère :

```
def test3():
    N=10
    U=np.zeros(N+1)
    for k in range(0,N+1):
        U[k]=1.0/(k+1) # correspond a une loi uniforme
    V=test_hausdorff(U)
    U[3]=0.16
    W=test_hausdorff(U)
    return V,W
```

On tape dans la console `>> V,W=test3()`. Quelles seront les valeurs de $V[0]$ et $W[0]$ retournées ?

III.3) Unicité de solutions à densité de classe $\mathcal{C}^1$

On suppose que X_1 et X_2 sont deux solutions de $\mathcal{M}^*([0,1])$, de densités adaptées respectives f_1 et f_2 , dont les restrictions à $[0,1]$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $h = f_2 - f_1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\hat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

26. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $|h(x) - h(y)| \leq K|x - y|$.
27. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $Z_n = Y/n$.

- a) Montrer que $|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\mathbb{E}(|Z_n - x|)$.
- b) En déduire que $|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}$.

28. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \widehat{h}_n(x) h(x) dx = 0.$$

30. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx.$$

31. En déduire que $f_1 = f_2$. Conclure.

III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$R_k(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) dt, \quad F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_k(\alpha_1, \alpha_2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)},$$

et $G(\alpha_1, \alpha_2) = \ln(R_0(\alpha_1, \alpha_2)) - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2$. On admet que R_k est continue sur $\mathbb{R}^2$.

32. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq e^x - 1 - x \leq Cx^2$.

33. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point et que

$$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (11)$$

$$\text{On admet que } \partial_2 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (12)$$

- b) Pour tout $i \in \{1, 2\}$, en déduire l'identité $\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i$. (13)

- c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 (t^i - F_i(\alpha_1, \alpha_2))(t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt.$$

34. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

- a) Exprimer $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ en fonction des dérivées partielles des $F_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $k \geq 0$.
 b) En déduire que, pour tout $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^t v \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0$.
 c) En déduire que les valeurs propres de $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ sont strictement positives.
 d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une variable aléatoire X solution de $\mathcal{M}^*([0, 1])$, de densité adaptée f telle que

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} & \text{si } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que G admet alors un minimum local en (α_1, α_2) .

FIN