

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2023

Ce sujet est présenté selon la mise en page de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Questions préliminaires	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable.</i>	2
2	Première Partie – La loi arcsinus	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; variables à densité ; Python.</i>	2
3	Deuxième Partie – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$	3
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; couples de variables discrètes ; convergences de variables ; Python.</i>	3
4	Troisième Partie – Comportement asymptotique	5
	<i>Thèmes abordés : convergences de variables ; séries ; probabilités discrètes ; Python. . .</i>	5

1 Questions préliminaires

Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si $t \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de t , que l'on note $[t]$, l'unique entier tel que $[t] \leq t < [t] + 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \left[\frac{n}{2} \right] \right) = +\infty.$$

2 Première Partie – La loi arcsinus

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; variables à densité ; Python.

3. On rappelle que la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection sur $[-1, 1]$. On note $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa bijection réciproque.

- a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

- b) Montrer que la fonction $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] - 1, 1[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. a) Soit $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = 2 \arcsin(\sqrt{x})$. Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée g donnée par

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

- b) Étudier la fonction g et tracer son graphe.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} g(t) & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
 - b) Soit X une variable aléatoire de densité f . On dit que X suit la loi arcsinus. Montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci. (On pourra considérer le changement de variable $u = 1 - x$.)
6. a) Soit U une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire

$$V = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} U \right)$$

suit la loi arcsinus.

- b) À l'aide de la question précédente, compléter les deux lignes de la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi arcsinus :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsinus() :
    U = ...
    V = ...
    return V
```

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Montrer l'encadrement

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Montrer que les deux inégalités sont inversées si l'on suppose que $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$.

8. Soient $x \in]0, 1/2[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

- pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leq a_n < [nx]$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

On admet que pour tout $x \in]0, 1[$ et toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les mêmes conditions qu'à la question précédente, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

3 Deuxième Partie – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; couples de variables discrètes ; convergences de variables ; Python.

Soit $\theta \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi donnée par

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - \theta.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_0 = 0$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

9. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$. En déduire la loi de $\frac{1}{2}(S_n + n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
10. Les variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

11. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{S}_n = \frac{1}{n}S_n$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et t_α le réel positif tel que $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$. En majorant $\sqrt{\theta(1-\theta)}$, montrer que l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n \right) \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique d'estimation du paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

12. a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$.
b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On introduit la variable aléatoire L_n , à valeurs dans $[0, n]$, définie par

$$L_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto \max\{k \in [0, n], S_{2k}(\omega) = 0\}.$$

La variable aléatoire $2L_n$ décrit donc le dernier instant avant l'instant $2n$ où la marche aléatoire prend la valeur 0.

13. Déterminer $\mathbb{P}(L_n = n)$.
14. Soit $k \in [0, n-1]$.
a) Montrer l'égalité d'événements suivante :

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0].$$

- b) Justifier que

$$\mathbb{P}_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0]) = \mathbb{P}([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]).$$

On notera p_{n-k} la valeur de cette probabilité.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [0, n]$, on a

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k},$$

où, par convention, $p_0 = 1$.

À partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $\theta = \frac{1}{2}$. Le calcul explicite des $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est l'objet des questions suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements

$$D_n = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k \neq 0], \quad D_n^+ = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0], \quad D_n^- = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k < 0].$$

On considère également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in [1, n]$, l'événement

$$A_{n,r} = \left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n} = 2r].$$

Pour tout entier r , on pose $A_{n,r} = \emptyset$ lorsque $r > n$ ou $r \leq 0$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, $a_{n,r} = \mathbb{P}(A_{n,r})$.

16. a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers.
 b) En déduire que

$$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(D_n^+) + \mathbb{P}(D_n^-).$$

17. Montrer que

$$\mathbb{P}(D_n^+) = \sum_{r=1}^n a_{n,r}.$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- a) Soit $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4}a_{n-1,q}, & \text{si } q = r-1 \text{ ou } q = r+1, \\ \frac{1}{2}a_{n-1,q}, & \text{si } q = r, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_{n,r} = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}.$$

4 Troisième Partie – Comportement asymptotique

Thèmes abordés : convergences de variables ; séries ; probabilités discrètes ; Python.

Dans cette troisième partie, on cherche à étudier la limite en loi de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

19. Montrer par récurrence sur n que pour tout $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right),$$

où l'on pose $\binom{m}{k} = 0$ dès que $k \notin [0, m]$.

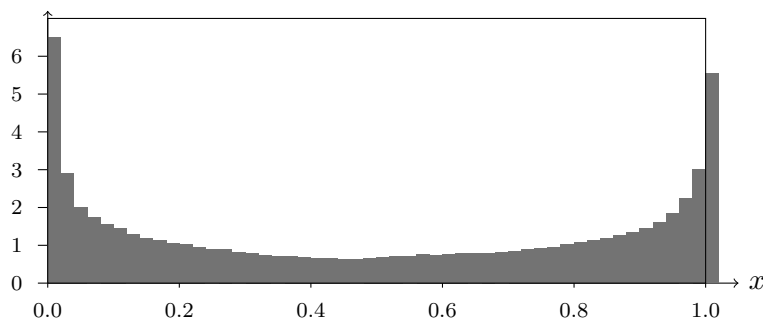
20. On rappelle que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été définie précédemment. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

21. a) Compléter par autant de lignes que nécessaire la fonction Python `DernierPassage` permettant de simuler la variable aléatoire L_n :

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n) :
    L = 0
    S = 0
    for i in range(1, 2*n+1) :
        ...
    return L
```

- b) À l'aide de cette fonction, on simule $N = 10000$ réalisations de la variable aléatoire $\frac{L_{100}}{100}$ puis on représente les valeurs obtenues sous la forme d'un histogramme à 100 classes. On obtient la figure suivante :



Quelle conjecture peut-on formuler à propos de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad u_n = \ln(C_n).$$

a) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

b) En déduire que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On admet que $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est la limite de cette suite.

23. Soient $x \in]0, 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

— pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leq a_n < [nx]$;

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$;

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{[nx]} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

b) Montrer, pour n suffisamment grand, l'encadrement

$$m_n \sum_{k=a_n}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{[nx]} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

où

$$m_n = \min\{C_k C_{n-k}, k \in [a_n, [nx]]\}, \quad M_n = \max\{C_k C_{n-k}, k \in [a_n, [nx]]\}.$$

c) Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'entiers telles que $1 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$. Montrer que les deux suites

$$\left(\min_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\max_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

sont convergentes, de même limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

d) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{[nx]} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi},$$

où la fonction G a été définie dans la première partie.

24. Soient $x \in]0, 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

— pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leq a_n < [nx]$;

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$;

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

a) Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 0.$$

25. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi.