

Concours ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2024

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance.

Exercice 1 – Accélération de la convergence de $\sum 1/n^2$

Exercice 1 – Restes, télescopage et approximation de S

$S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, S_N sa somme partielle, $R_N = S - S_N$ son reste, $u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$ et $U(p) = \sum_{n \geq 1} u_n(p)$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Séries et intégrales de Riemann.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

2. Encadrement du reste.

- a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $n \geq 2$: si $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$; si $t \in [n-1, n]$ (avec $n-1 \geq 1 > 0$), $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{n^2}$. Par croissance de l'intégrale sur des segments de longueur 1,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}.$$

- b) Soit $N \geq 1$ et $K > N$. En sommant pour $n \in \llbracket N+1, K \rrbracket$ (on a bien $n \geq 2$) et par la relation de Chasles,

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{K+1} = \int_{N+1}^{K+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=N+1}^K \frac{1}{n^2} \leq \int_N^K \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N} - \frac{1}{K}.$$

La série converge (question 1) ; en faisant tendre K vers $+\infty$:

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}.$$

3. Précision de S_N .

$$|S_N - S| = R_N \leq \frac{1}{N} \leq 10^{-3} \text{ dès que } N \geq 1000.$$

$$N_0 = 1000.$$

4. Une meilleure approximation.

a) $T_N - S = \frac{1}{N+1} - R_N$ et, d'après 2.b, $\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} \leq T_N - S \leq 0$. Donc

$$|T_N - S| \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}, \quad \boxed{|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}.$$

b) $\frac{1}{N^2} \leq 10^{-3} \iff N^2 \geq 1000$. Comme $31^2 = 961 < 1000 \leq 1024 = 32^2$:

$$\boxed{N_1 = 32 < N_0.}$$

5. La série $\sum u_n(p)$.

a) $u_n(p) = \frac{1}{n^{p+1}} \prod_{j=0}^p \frac{n}{n+j}$ et chaque facteur $\frac{n}{n+j}$ tend vers 1 :

$$\boxed{u_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}.}$$

b) Les termes sont positifs et $p+1 \geq 2 > 1$: par comparaison de séries à termes positifs avec une série de Riemann convergente,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n(p) \text{ converge.}}$$

6. Calcul de $U(1)$.

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = u_n(1)$:

$$\boxed{a = 1, \quad b = -1.}$$

b) Par télescopage, $\sum_{n=1}^N u_n(1) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$:

$$\boxed{U(1) = 1.}$$

7. Calcul de $U(p)$.

a) En réduisant au même dénominateur $n(n+1) \cdots (n+p)$,

$$u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = \frac{(n+p) - n}{n(n+1) \cdots (n+p)},$$

$$\boxed{u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = p u_n(p).}$$

b) Pour $p \geq 2$, par télescopage, $p \sum_{n=1}^N u_n(p) = u_1(p-1) - u_{N+1}(p-1) \rightarrow u_1(p-1) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots p} = \frac{1}{p!}$. Pour $p = 1$, $U(1) = 1 = \frac{1}{1 \cdot 1!}$.

$$\boxed{\forall p \geq 1, \quad U(p) = \frac{1}{p p!}.$$

8. Une nouvelle expression de S .

a) Notons $v_n(p) = \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}$.

Initialisation ($p = 1$). $1! v_n(1) + 0! u_n(1) = \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{n}{n^2(n+1)} = \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2}$.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang p . On a

$$\begin{aligned} (p+1)! v_n(p+1) + p! u_n(p+1) &= \frac{p!((p+1)+n)}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)} \\ &= \frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} = p! v_n(p), \end{aligned}$$

car $u_n(p+1) = \frac{n}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)}$. En remplaçant $p! v_n(p)$ dans la formule au rang p :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= (p+1)! v_n(p+1) + p! u_n(p+1) + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k) \\ &= (p+1)! v_n(p+1) + \sum_{k=1}^{p+1} (k-1)! u_n(k). \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k).}$$

b) $0 \leq v_n(p) \leq u_n(p)$, donc $\sum v_n(p)$ converge par comparaison (question 5). Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum u_n(k)$ convergent, on somme la relation a) pour $n \geq 1$ (linéarité) et on utilise 7.b : $S = p! \sum_{n \geq 1} v_n(p) + \sum_{k=1}^p (k-1)! U(k)$, avec $(k-1)! U(k) = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2}$.

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}}.$$

9. Majoration du reste.

Chaque facteur $n+j$ est $\geq n$, donc $0 \leq v_n(p) \leq \frac{1}{n^{p+2}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$; comme en 2.a, $\frac{1}{n^{p+2}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{p+2}}$ pour $n \geq 2$. En sommant de $N+1$ à K :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^K v_n(p) \leq \int_N^K \frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{N^{p+1}} - \frac{1}{K^{p+1}} \right) \leq \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}},$$

et on fait tendre K vers $+\infty$:

$$\boxed{0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} \leq \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}}.$$

10. Précision de U_N .

D'après 8.b avec $p = 3$ ($\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$) et la question 9,

$$0 \leq S - U_N = 6 \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(3) \leq \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{N^4} = \frac{3}{2N^4}.$$

Or $\frac{3}{2N^4} \leq 10^{-3} \iff N^4 \geq 1500$. Comme $6^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \times 81 = 1296 < 1500$ et $7^4 = 2401 \geq 1500$:

$$\boxed{N_2 = 7.}$$

11. Commentaire de la figure 1.

Les échelles étant logarithmiques, une erreur de la forme $\frac{C}{N^\kappa}$ est représentée par une droite de pente $-\kappa$.

- $|S_N - S| = R_N$ est encadrée par $\frac{1}{N+1}$ et $\frac{1}{N}$: droite de pente -1 ; l'erreur vaut environ 10^{-3} pour $N = 10^3$, ce qui est cohérent avec $N_0 = 1000$.
- $|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$: pente -2 ; l'erreur passe sous 10^{-3} dès N de l'ordre de 30 (cf. $N_1 = 32$).
- $|U_N - S| \leq \frac{3}{2N^4}$: pente -4 ; l'erreur passe sous 10^{-3} dès les premières valeurs de N (cf. $N_2 = 7$) et atteint environ 10^{-12} pour $N = 10^3$.

Les corrections successives accélèrent la convergence : erreurs en $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N^2}$, $\frac{1}{N^4}$.

Exercice 2 – Interpolation de Lagrange et de Newton

Exercice 2 – Bases de Lagrange et de Newton de $\mathbb{R}_n[x]$

$x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, $\Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n))$, $\langle P, Q \rangle = \sum_k P(x_k)Q(x_k)$, $N_0 = 1$ et $N_i = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$.

Corrigé – Exercice 2.

Partie 1

1. L'application Φ .

- a) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + \mu Q)(x_k) = \lambda P(x_k) + \mu Q(x_k)$: Φ est linéaire. Si $\Phi(P) = 0$, P et le polynôme nul, de degré au plus n , coïncident en les $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$: $P = 0$. Ainsi $\text{Ker } \Phi = \{0\}$:

Φ est linéaire et injective.

- b) $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$; par le théorème du rang, $\text{rg } \Phi = n+1$ et Φ est bijective.

$\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[x], \forall k, P(x_k) = y_k \quad (P = \Phi^{-1}(y_0, \dots, y_n)).$

2. Les polynômes L_i .

On applique 1.b à $(y_0, \dots, y_n) = (\delta_{i,0}, \dots, \delta_{i,n})$:

$\exists ! L_i \in \mathbb{R}_n[x], \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$

3. Un exemple avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2, 3)$.

Chaque polynôme proposé ci-dessous est de degré 3, s'annule en les trois points x_j , $j \neq i$ (facteurs du numérateur), et vaut 1 en x_i (par choix de la constante) ; par unicité (question 2), ce sont les L_i :

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{24}x + \frac{1}{4}, \\ L_1 &= \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}, \\ L_2 &= -\frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 1, \\ L_3 &= \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour L_0 : $(x_0 - 1)(x_0 - 2)(x_0 - 3) = (-2)(-3)(-4) = -24$.

4. Expression générale de L_i .

Le dénominateur $D_i = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$ est non nul car les x_j sont distincts. Le polynôme $R_i = \frac{1}{D_i} \prod_{j \neq i} (x - x_j)$ est de degré n , s'annule en chaque x_j , $j \neq i$, et vaut $\frac{D_i}{D_i} = 1$ en x_i . Par unicité (question 2), $R_i = L_i$.

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, \quad \deg L_i = n, \quad \text{coefficient dominant } \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

5. Un produit scalaire.

L'application est symétrique, linéaire par rapport à P (donc bilinéaire par symétrie), et $\langle P, P \rangle = \sum_k P(x_k)^2 \geq 0$. Si $\langle P, P \rangle = 0$, tous les $P(x_k)$ sont nuls, donc $\Phi(P) = 0$ et $P = 0$ (question 1).

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[x].$$

6. La base $\mathcal{L}$.

$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_k L_i(x_k) L_j(x_k) = \sum_k \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}$: la famille $\mathcal{L}$ est orthonormée, donc libre, et compte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ vecteurs.

$$\mathcal{L} \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[x].$$

7. Coordonnées dans $\mathcal{L}$.

Dans une base orthonormée, la i -ème coordonnée de P est $\langle P, L_i \rangle = \sum_k P(x_k) \delta_{i,k} = P(x_i)$.

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

Partie 2

8. Un exemple avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2, 3)$.

a)

$$N_0 = 1, \quad N_1 = x + 1, \quad N_2 = x^2 - 1, \quad N_3 = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

b) D'après 7, $m_{k,i} = N_i(x_k)$. Les valeurs en $-1, 1, 2, 3$ sont $(1, 1, 1, 1)$ pour N_0 , $(0, 2, 3, 4)$ pour N_1 , $(0, 0, 3, 8)$ pour N_2 et $(0, 0, 0, 8)$ pour N_3 . En colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) M est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible. On résout $MX = Y$ par substitution :

$$\begin{cases} a = y_1 \\ a + 2b = y_2 \\ a + 3b + 3c = y_3 \\ a + 4b + 8c + 8d = y_4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = y_1 \\ b = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ c = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ d = -\frac{1}{24}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{8}y_4 \end{cases}$$

(par exemple $3c = y_3 - y_1 - 3b = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + y_3$). D'où

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

9. La base de Newton.

Pour tout i , $\deg N_i = i$ (produit de i facteurs de degré 1). Une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre ; $\mathcal{N}$ compte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ éléments :

$$\mathcal{N} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x].$$

10. Coordonnées de N_i dans $\mathcal{L}$.

a) D'après 7, $N_0 = \sum_k N_0(x_k) L_k$ avec $N_0(x_k) = 1$:

$$N_0 = \sum_{k=0}^n L_k.$$

b) Pour $i \geq 1$, $N_i(x_k) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)$, et ce produit contient le facteur nul $x_k - x_k$ lorsque $k < i$. La question 7 donne (le cas $i = 0$ étant a), avec la convention d'un produit vide égal à 1) :

$$N_i = \sum_{k=i}^n \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) \right) L_k.$$

11. Matrice de passage.

La colonne d'indice i de A contient les coordonnées de N_i dans $\mathcal{L}$ (lignes et colonnes indexées de 0 à n) :

$$A = (a_{k,i})_{0 \leq k, i \leq n}, \quad a_{k,i} = \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) & \text{si } k \geq i, \\ 0 & \text{si } k < i, \end{cases}$$

triangulaire inférieure, de coefficients diagonaux $\prod_{j < i} (x_i - x_j) \neq 0$. La base $\mathcal{N}$ n'est pas orthonormée :

$$\langle N_0, N_0 \rangle = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1 \neq 1.$$

12. Coordonnées de P_n dans $\mathcal{N}$.

$P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{N}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (question 9) :

$$\exists! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad P_n = \sum_{i=0}^n a_i N_i.$$

13. Programmes.

a) On multiplie les facteurs $x_i - x_j$ pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket \setminus \{i\}$ (X est une matrice colonne, d'où l'indice $[\cdot, 0]$).

```
def prodX(X, i, k):
    p = 1
    for j in range(0, k+1):
        if j != i:
            p = p*(X[i,0]-X[j,0])
    return p
```

$$\text{prodX}(X, i, k) = \prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j).$$

- b) On applique la formule admise ; pour $k = 0$, elle redonne $a_0 = y_0$ (produit vide).

```
def coeff(X, Y):
    m, p = np.shape(X)          # m = n+1
    a = np.zeros((m, 1))
    for k in range(0, m):
        s = 0
        for i in range(0, k+1):
            s = s + Y[i,0]/prodX(X, i, k)
        a[k,0] = s
    return a
```

$\text{coeff}(X, Y)$ renvoie la colonne $(a_0, \dots, a_n)$.

- c) D'après 7, Y est la colonne des coordonnées de P_n dans $\mathcal{L}$ et $\text{coeff}(X, Y)$ celle de ses coordonnées dans $\mathcal{N}$: par la formule de changement de base, $Y = A \cdot \text{coeff}(X, Y)$, soit $\text{coeff}(X, Y) = A^{-1}Y$. En prenant pour Y la j -ième colonne E_j de I_{n+1} (donc $P_n = L_j$), on obtient la j -ième colonne de A^{-1} .

$$A^{-1} = (\text{coeff}(X, E_0) \ \cdots \ \text{coeff}(X, E_n)) : n+1 \text{ appels.}$$

14. Coefficients extrêmes.

- a) Pour $i \geq 1$, $N_i(x_0) = 0$ (facteur $x_0 - x_0$) ; donc $y_0 = P_n(x_0) = a_0 N_0(x_0) = a_0$. Pour $i < n$, $\deg N_i < n$, et N_n est unitaire de degré n : le coefficient de x^n dans $P_n = \sum a_i N_i$ est a_n .

$$a_0 = y_0, \quad a_n = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } P_n.$$

- b) $\sum_i y_i L_i \in \mathbb{R}_n[x]$ et prend en x_k la valeur $\sum_i y_i \delta_{i,k} = y_k$; par unicité (1.b),

$$P_n = \sum_{i=0}^n y_i L_i.$$

- c) Par la question 4, le coefficient de x^n de $\sum_i y_i L_i$ est $\sum_i y_i / \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$; avec a) :

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

15. Les coefficients a_k .

- a) Chaque N_j , $j \leq k$, est de degré $j \leq k$:

$$Q_k \in \mathbb{R}_k[x].$$

- b) Soit $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Pour $j > k$, on a $j-1 \geq k \geq i$, donc N_j contient le facteur $x - x_i$ et $N_j(x_i) = 0$. Ainsi $y_i = P_n(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j N_j(x_i) = \sum_{j=0}^k a_j N_j(x_i) = Q_k(x_i)$.

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad Q_k(x_i) = y_i \quad (\text{en particulier pour } i \in \llbracket 1, k \rrbracket).$$

- c) $Q_k \in \mathbb{R}_k[x]$ prend les valeurs $y_0, \dots, y_k$ en $x_0, \dots, x_k$; par unicité du polynôme d'interpolation (1.b avec k au lieu de n) :

$$P_k = a_0 N_0 + \cdots + a_k N_k.$$

- d)** On applique la question 14 aux $k + 1$ points $X_0, \dots, X_k$: le coefficient de x^k de P_k est d'une part a_k (par c), N_k étant unitaire de degré k et les autres N_j de degré $< k$), d'autre part $\sum_{i=0}^k y_i / \prod_{j \neq i, j \leq k} (x_i - x_j)$.

$$a_k = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

Problème – Loi de Cauchy

Problème – Stabilité, simulation et estimation du paramètre

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2}. \quad Y_n = \mathbf{1}_{|X_n| \leq M}, \quad \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad p(a) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{M}{a}.$$

Corrigé – Problème.

Partie 1

1. Une densité.

f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Une primitive de f est $x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a}$. Pour $A, B > 0$,

$$\int_{-A}^B f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{B}{a} + \arctan \frac{A}{a} \right) \xrightarrow{A, B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$: c'est une densité.

2. Fonction de répartition.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $A > 0$, $\int_{-A}^x f = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{a} + \arctan \frac{A}{a} \right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2}$ quand $A \rightarrow +\infty$.

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2}.$$

3. Pas d'espérance.

Sur $[1, +\infty[$, $xf(x) \geq 0$ et $xf(x) \sim \frac{a}{\pi x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, $\int_1^{+\infty} xf(x) dx$ diverge (comparaison de fonctions positives). L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ ne converge donc pas absolument :

X n'admet pas d'espérance.

4. Changement d'échelle.

Comme $a > 0$, $F_{aX}(x) = \mathbb{P}(X \leq \frac{x}{a}) = F_X(\frac{x}{a})$ pour tout x .

- Si X suit la loi de Cauchy standard, $F_{aX}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2}$: aX suit la loi de Cauchy de paramètre a .
- Réciproquement, si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a , $F_X(y) = F_{aX}(ay) = \frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2}$: X suit la loi standard.

La fonction de répartition caractérisant la loi :

$$X \hookrightarrow \mathcal{C}(1) \iff aX \hookrightarrow \mathcal{C}(a).$$

En particulier, si $Z \hookrightarrow \mathcal{C}(b)$ et $c > 0$, alors $\frac{Z}{b} \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$, puis $cZ = (cb)\frac{Z}{b} \hookrightarrow \mathcal{C}(cb)$.

5. Une primitive de g .

a) En multipliant l'égalité admise par $(t^2 + k^2)((x - t)^2 + 1)$:

$$1 = (\alpha t + \beta)(t^2 - 2xt + x^2 + 1) + (-\alpha t + \alpha x + \gamma)(t^2 + k^2).$$

En développant, le coefficient de t^3 est $\alpha - \alpha = 0$, et

$$1 = (\beta + \gamma - \alpha x)t^2 + (\alpha(x^2 + 1 - k^2) - 2\beta x)t + (\beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2).$$

Ce polynôme en t est constant égal à 1 sur $\mathbb{R}$: par identification des coefficients,

$$\boxed{\beta + \gamma = \alpha x, \quad \alpha(x^2 + 1 - k^2) = 2\beta x, \quad \beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2 = 1.}$$

b) En remplaçant αx par $\beta + \gamma$ dans la troisième équation : $\beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 = 1$ (E₁). En multipliant la deuxième par x puis en remplaçant αx : $(\beta + \gamma)(x^2 + 1 - k^2) = 2\beta x^2$, soit $\beta(1 - k^2 - x^2) + \gamma(x^2 + 1 - k^2) = 0$ (E₂). La somme (E₁) + (E₂) donne $2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) = 1$.

$$\boxed{\beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 = 1, \quad 2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) = 1.}$$

c) Posons $s = x^2 + k^2 + 1$. En ajoutant à la première équation k fois la seconde :

$$(s + 2k)\beta + k(2k + s)\gamma = 1 + k, \quad \text{soit} \quad (s + 2k)(\beta + k\gamma) = k + 1.$$

Or $s + 2k = x^2 + (k + 1)^2 > 0$:

$$\boxed{\beta + k\gamma = \frac{k + 1}{x^2 + (k + 1)^2}.$$

d) Les quotients dans ln sont strictement positifs, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2t}{t^2 + k^2} + \frac{2(x - t)}{(x - t)^2 + 1} \right) + \frac{\beta}{k} \cdot \frac{1/k}{1 + t^2/k^2} + \frac{\gamma}{1 + (t - x)^2} \\ &= \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + k^2} + \frac{\alpha(x - t) + \gamma}{(x - t)^2 + 1} = g(t). \end{aligned}$$

$$\boxed{G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

6. Somme de deux variables de Cauchy.

a) X et Y sont indépendantes, de densités $f_k(t) = \frac{k}{\pi(t^2 + k^2)}$ et $f_1(u) = \frac{1}{\pi(u^2 + 1)}$. Par le théorème de convolution, $X + Y$ a pour densité $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)f_1(x - t) dt = \frac{k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$. Pour $x \neq 0$, par 5.d, $\int_A^B g = G(B) - G(A)$. Quand $t \rightarrow \pm\infty$, $\frac{t^2 + k^2}{(x - t)^2 + 1} \rightarrow 1$, donc le terme logarithmique tend vers 0, et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{k} + \gamma \right), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{k} + \gamma \right).$$

Donc $h(x) = \varphi(x)$ pour $x \neq 0$; modifier une densité en un point ne change pas son caractère de densité :

$$\boxed{\varphi \text{ (prolongée de façon quelconque en 0) est une densité de } X + Y.}$$

- b) Pour $x \neq 0$, avec 5.c, $\varphi(x) = \frac{k}{\pi^2} \cdot \pi \left(\frac{\beta}{k} + \gamma \right) = \frac{\beta+k\gamma}{\pi} = \frac{k+1}{\pi(x^2+(k+1)^2)}$. C'est la densité de la loi de Cauchy de paramètre $k+1$ (sauf éventuellement en 0) :

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{C}(k+1).$$

7. Stabilité par somme.

Montrons par récurrence sur $k \geq 1$: « pour tout $a > 0$ et toutes $X_1, \dots, X_k$ indépendantes de loi $\mathcal{C}(a)$, $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{C}(ka)$ ». Le cas $k = 1$ est immédiat. Supposons le résultat au rang k et soient $X_1, \dots, X_{k+1}$ indépendantes de loi $\mathcal{C}(a)$. Par hypothèse, $S_k = X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{C}(ka)$, donc $\frac{S_k}{a} \hookrightarrow \mathcal{C}(k)$ et $\frac{X_{k+1}}{a} \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$ (question 4). Ces deux variables sont indépendantes (lemme des coalitions) ; la question 6 donne $\frac{S_k + X_{k+1}}{a} \hookrightarrow \mathcal{C}(k+1)$, puis, par la question 4, $S_k + X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{C}((k+1)a)$.

$$X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{C}(ka).$$

Partie 2

8. Simulation par inversion.

Presque sûrement $U \in]0, 1[$, donc $V = \pi(U - \frac{1}{2}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $Y = a \tan V$ est bien défini. La fonction $\tan$ est une bijection strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$. Pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(V \leq \arctan \frac{y}{a}\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{a} + \frac{1}{2} = F(y),$$

car $\frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{a} + \frac{1}{2} \in]0, 1[$.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{C}(a).$$

9. Fonction cauchy.

On applique la question 8 à une réalisation de U .

def cauchy(a):

 U = rd.random()

 return a*np.tan(np.pi*(U-1/2))

10. Fonction realisation.

n appels indépendants à cauchy.

def realisation(n, a):

 R = np.zeros(n)

 for i in range(n):

 R[i] = cauchy(a)

 return R

11. Fonction moyennes.

Les sommes cumulées $X_1 + \dots + X_k$ sont divisées par k , pour k de 1 à n .

def moyennes(n, a):

 R = realisation(n, a)

 return np.cumsum(R)/np.arange(1, n+1)

12. Commentaire de la figure 2.

Les trajectoires de $(\bar{X}_n)$ ne se stabilisent pas : elles présentent de grands sauts même pour n grand, et les trois réalisations ne se rapprochent pas d'une même valeur. Ce n'est pas contradictoire avec la loi faible des grands nombres, qui suppose l'existence d'une espérance (question 3). Plus précisément, par la question 7, $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{C}(na)$, donc, par la question 4,

$$\forall n \geq 1, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \hookrightarrow \mathcal{C}(a).$$

La moyenne empirique n'est donc pas plus concentrée qu'une seule observation, et ne converge pas vers une constante.

Partie 3

13. Loi de Y_n .

Y_n prend les valeurs 0 et 1 et, F étant continue, $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(-M \leq X_n \leq M) = F(M) - F(-M) = 2F(M) - 1$, car $\arctan$ est impaire. Ainsi

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2F(M) - 1) = \mathcal{B}\left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{M}{a}\right) = \mathcal{B}(p(a)).$$

14. Convergence de $\bar{Y}_n$.

Les Y_n , fonctions respectives des X_n mutuellement indépendantes, sont mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p(a))$; elles admettent une espérance $p(a)$ et une variance. Par la loi faible des grands nombres,

$$\bar{Y}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} p(a) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{M}{a} \right).$$

15. Intervalles de confiance.

a) $\frac{M}{a} > 0$, donc $\arctan \frac{M}{a} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $p(a) \in]0, 1[$. Ensuite $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$.

$$0 < p(a) < 1, \quad p(a)(1-p(a)) \leq \frac{1}{4}.$$

b) Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (de dérivée la densité gaussienne, strictement positive), de limites 0 et 1 : c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Il existe donc un unique z tel que $\Phi(z) = 0,975$, et $z > 0$ car $\Phi(0) = \frac{1}{2} < 0,975$.

$$\exists! z \in \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = 0,975, \quad \text{et } z > 0 \quad (z \simeq 1,96).$$

c) Notons $p = p(a)$ et $\theta = \arctan \frac{M}{a} = \frac{\pi}{2}p$. Les Y_k sont indépendantes, de même loi, d'espérance p et de variance $p(1-p) > 0$. Par le théorème central limite, $Y_n^* = \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$; en notant F_n la fonction de répartition de Y_n^* , la définition de la convergence en loi (Φ étant continue) donne

$$1 - \alpha_n := F_n(z) - F_n(-z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0,95.$$

Or $F_n(z) - F_n(-z) = \mathbb{P}(-z < Y_n^* \leq z) \leq \mathbb{P}(|Y_n^*| \leq z)$, et, comme $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$, l'événement $[|Y_n^*| \leq z]$ est inclus dans $[|\bar{Y}_n - p| \leq \frac{z}{2\sqrt{n}}]$. Ainsi $\alpha_n \rightarrow 0,05$ et

$$\mathbb{P}\left(\bar{Y}_n - \frac{z}{2\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{Y}_n + \frac{z}{2\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \alpha_n.$$

En multipliant par $\frac{\pi}{2} > 0$:

$$\left[\frac{\pi}{2} \left(\bar{Y}_n - \frac{z}{2\sqrt{n}} \right), \frac{\pi}{2} \left(\bar{Y}_n + \frac{z}{2\sqrt{n}} \right) \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de $\arctan \frac{M}{a}$ au niveau de confiance 95%.

- d) Notons L_n et U_n les bornes précédentes, et $L'_n = \max(L_n, 0)$, $U'_n = \min(U_n, \frac{\pi}{2})$. Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $[L_n \leq \theta \leq U_n] = [L'_n \leq \theta \leq U'_n]$. La fonction $h : \theta \mapsto \frac{M}{\tan \theta}$ est une bijection strictement décroissante de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$, et $a = h(\theta)$. Avec les conventions $h(0) = +\infty$ et $h(\frac{\pi}{2}) = 0$, $[L'_n \leq \theta \leq U'_n] = [h(U'_n) \leq a \leq h(L'_n)]$, d'où

$$\left[\frac{M}{\tan U'_n}, \frac{M}{\tan L'_n} \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance 95%, la borne supérieure pouvant valoir $+\infty$ pour les petites valeurs de n (lorsque $L_n \leq 0$).

16. Commentaire de la figure 3.

La valeur $a = 1$ reste comprise entre les deux bornes. L'intervalle se resserre autour de a quand n augmente, mais lentement (l'échelle des abscisses est logarithmique) : la largeur de l'intervalle sur θ vaut $\frac{\pi z}{2\sqrt{n}}$. Pour les petites valeurs de n , l'intervalle est très dissymétrique autour de a , la fonction h n'étant pas affine (borne inférieure proche de 0, borne supérieure grande).

Les intervalles contiennent a et leur largeur tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

17. Qualités d'un intervalle de confiance et choix de M .

On attend d'un intervalle de confiance qu'il contienne le paramètre avec une probabilité au moins égale au niveau annoncé (*fiabilité*) et qu'il soit le plus étroit possible (*précision*). Le niveau étant le même pour toutes les valeurs de M , on compare les longueurs.

Avec l'identité $\frac{1}{\tan L} - \frac{1}{\tan U} = \frac{\sin(U-L)}{\sin L \sin U}$, la longueur de l'intervalle de d) vaut (lorsque $0 < L_n < U_n < \frac{\pi}{2}$)

$$\ell_n = \frac{M \sin\left(\frac{\pi z}{2\sqrt{n}}\right)}{\sin L_n \sin U_n}, \quad \text{donc} \quad \sqrt{n} \ell_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \frac{\pi z}{2} \cdot \frac{M}{\sin^2 \theta} = \frac{\pi z a}{2} \left(\frac{M}{a} + \frac{a}{M} \right),$$

car $L_n, U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ (question 14 et composition par une fonction continue), $\sqrt{n} \sin \frac{\pi z}{2\sqrt{n}} \rightarrow \frac{\pi z}{2}$, et $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{a^2 + M^2}{M^2}$. La fonction $r \mapsto r + \frac{1}{r}$ est minimale en $r = 1$; elle vaut environ 2,27 ; 2 ; 2,5 ; 5,2 pour $\frac{M}{a} = 0,6$; 1 ; 2 ; 5. C'est ce qu'on observe sur la figure 4 : toutes les longueurs décroissent (en $\frac{1}{\sqrt{n}}$), les intervalles les plus courts sont obtenus pour $\frac{M}{a} = 1$ (puis 0,6 et 2, assez proches), et ils sont nettement plus longs pour $\frac{M}{a} = 5$.

Il faut choisir M du même ordre de grandeur que a .

Comme a est inconnu, on peut choisir M à l'aide d'une première estimation de a : par exemple, $\mathbb{P}(|X| \leq a) = \frac{2}{\pi} \arctan 1 = \frac{1}{2}$, donc la médiane empirique des $|X_i|$ fournit un ordre de grandeur de a .