

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2024

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : séries ; intégrales généralisées.</i>	<i>2</i>
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; Python.</i>	<i>3</i>
3 Problème	5
<i>Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; intégrales généralisées ; Python.</i>	<i>5</i>

1 Exercice 1

Thèmes abordés : séries ; intégrales généralisées.

À toutes fins utiles, on donne $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $3^4 = 81$ et $4^4 = 256$.

1. Rappeler, en fonction du réel α , la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

On note alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et, pour tout entier naturel N non nul,

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}.$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel N non nul,

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}.$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que $\forall N \geq N_0$, $|S_N - S| \leq 10^{-3}$.
4. On pose, pour tout entier naturel N non nul, $T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, $|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$.
 - b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N \geq N_1$, $|T_N - S| \leq 10^{-3}$.

On pose maintenant, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls,

$$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.
 - a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(p)$.

On pose, pour tout entier naturel p non nul, $U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$.

6. a) Déterminer deux réels a, b vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $u_n(1) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
b) En déduire la valeur de $U(1)$.
7. a) Exprimer, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $n \geq 1$ et $p \geq 2$, $u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.
b) Montrer que, pour tout entier naturel p non nul, $U(p) = \frac{1}{p!}$.
8. a) Montrer, par récurrence sur p , que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1) \dots (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k).$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$, montrer que, pour tout couple (N, p) d'entiers naturels non nuls,

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc, pour tout entier naturel N non nul,

$$U_N = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geq N_2, |U_N - S| \leq 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N , T_N et U_N , respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

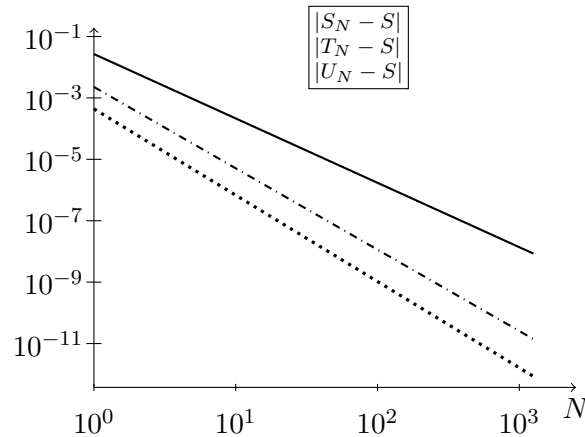


Figure 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N , T_N et U_N .

2 Exercice 2

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; Python.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

Partie 1

On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)). \end{cases}$$

On rappelle que si deux polynômes de degré au plus m coïncident en $m+1$ points distincts, alors ils sont égaux (m étant un entier naturel).

1. a) Montrer que Φ est une application linéaire injective.
 b) En déduire que, pour tout élément $(y_0, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n vérifiant $P(x_0) = y_0, \dots, P(x_n) = y_n$.
 Un tel polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel i de $[0, n]$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant

$$\forall j \in [0, n], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
 Expliciter les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3 .
4. Montrer que, pour tout entier i de $[0, n]$,

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

En déduire, pour tout entier i de $[0, n]$, le degré de L_i et son coefficient dominant.

$\mathcal{L}$ désigne la famille $(L_0, \dots, L_n)$. On considère maintenant, pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k).$$

5. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Montrer que $\mathcal{L}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.
7. Montrer que le $(n+1)$ -uplet des coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathcal{L}$ est $(P(x_0), \dots, P(x_n))$.

Partie 2

On pose maintenant $N_0 = 1$ et, pour tout entier naturel i de $[1, n]$,

$$N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

8. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
 a) Expliciter les polynômes N_0, N_1, N_2 et N_3 .
 b) Pour tout entier i de $[0, 3]$, déterminer les coordonnées $(m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i})$ de N_i dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) . On note alors M la matrice $(m_{i-1,j-1})_{1 \leq i,j \leq 4}$.
 c) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .
9. Montrer que $\mathcal{N} = (N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
10. a) Montrer que $N_0 = \sum_{k=0}^n L_k$.
 b) Montrer que, pour tout entier naturel i de $[0, n]$,

$$N_i = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k.$$

11. Donner la matrice de passage A de la base $\mathcal{L}$ vers la base $\mathcal{N}$. La base $\mathcal{N}$ est-elle orthonormée ?

On considère $n + 1$ points $X_0 = (x_0, y_0), \dots, X_n = (x_n, y_n)$. Pour tout entier naturel k de $[0, n]$, on note P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X_0, \dots, X_k$: c'est l'unique polynôme de degré au plus k vérifiant $P_k(x_0) = y_0, \dots, P_k(x_k) = y_k$.

12. Justifier l'existence et l'unicité des $n + 1$ réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$P_n(x) = a_0 N_0(x) + a_1 N_1(x) + \dots + a_n N_n(x).$$

13. Dans cette question uniquement, on admet que $a_0 = y_0$ et que, pour tout entier naturel k de $[1, n]$,

$$a_k = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

Considérons que les données sont représentées par deux matrices X et Y ,

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En Python, on représentera cela par deux matrices, au format `numpy.array`, comportant chacun $n + 1$ lignes et 1 colonne.

- Écrire une fonction, en langage Python, nommée `prodX` prenant en entrée X , un entier i et un entier k et qui renvoie le produit $\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)$.
 - Écrire une fonction, en langage Python, nommée `coeff` prenant en entrée X et Y et qui renvoie les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sous forme d'une matrice.
 - Comment utiliser cette fonction pour trouver l'inverse de la matrice de passage A définie à la question 11 ? Combien d'appels de cette fonction sont nécessaires ?
14.
 - Montrer que $a_0 = y_0$ et que a_n est le coefficient du monôme de degré n de $P_n(x)$.
 - Justifier que $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$.
 - En déduire que $a_n = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$.
15. Soit k un entier naturel de $[1, n - 1]$. On pose $Q_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j N_j(x)$.
- Montrer que Q_k est un élément de $\mathbb{R}_k[x]$.
 - Montrer que, pour tout entier i de $[1, k]$, $Q_k(x_i) = y_i$.
 - En déduire que $P_k(x) = a_0 N_0(x) + \dots + a_k N_k(x)$.
 - Montrer que $a_k = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}$.

3 Problème

Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; intégrales généralisées ; Python.

Partie 1

On considère un paramètre réel $a > 0$, et l'on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité.
2. Montrer que la fonction de répartition associée à f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$.

Si une variable aléatoire réelle X a pour densité la fonction f , on dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$. Lorsque $a = 1$, on dit que X suit la loi de Cauchy standard.

3. Une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy admet-elle une espérance ?
4. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que X suit la loi de Cauchy standard si et seulement si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a .
5. Soit k un entier naturel non nul. Soit x un réel non nul. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{(t^2 + k^2)((x - t)^2 + 1)}.$$

On admet qu'il existe des réels α, β, γ tels que, pour tout réel t ,

$$g(t) = \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + k^2} + \frac{\alpha(x - t) + \gamma}{(x - t)^2 + 1}.$$

a) Montrer que
$$\begin{cases} \beta + \gamma = \alpha x, \\ \alpha(x^2 + 1 - k^2) = 2\beta x, \\ \beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2 = 1. \end{cases}$$

b) En déduire que
$$\begin{cases} \beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 = 1, \\ 2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) = 1. \end{cases}$$

c) Montrer finalement que $\beta + \gamma k = \frac{k+1}{x^2 + (k+1)^2}$.

d) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(t) = \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{t^2 + k^2}{(x - t)^2 + 1} \right) + \frac{\beta}{k} \arctan \left(\frac{t}{k} \right) + \gamma \arctan(t - x)$$

est une primitive de g .

6. Soit k un entier naturel non nul. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre k et Y une variable aléatoire de loi de Cauchy standard, indépendante de X . On admet que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité.

a) Montrer que la fonction φ est une densité de $X + Y$ où φ est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = \frac{k}{\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \right).$$

b) En déduire que $X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $k + 1$.

7. Montrer par récurrence sur k que, pour tout k entier naturel non nul, si $X_1, \dots, X_k$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre a , alors $X_1 + \dots + X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre ka .

On pourra se ramener à la question précédente en utilisant la question 4.

Partie 2

8. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que

$$Y = a \tan \left(\pi \left(U - \frac{1}{2} \right) \right)$$

suit la loi de Cauchy de paramètre a .

9. Écrire une fonction en langage Python, nommée `cauchy`, prenant en argument un nombre flottant $a > 0$ et simulant une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre a .

Soient n un entier naturel non nul, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X et $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

10. Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation`, prenant en argument un entier n et un réel a et renvoyant un vecteur de taille n contenant une réalisation du n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$.
11. Écrire une fonction en langage Python, nommée `moyennes`, prenant en argument un entier n et un réel a et renvoyant un vecteur de taille n contenant une réalisation de $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$.
12. On a représenté sur la figure 2 l'évolution de trois réalisations de ces vecteurs. Commenter cette figure.

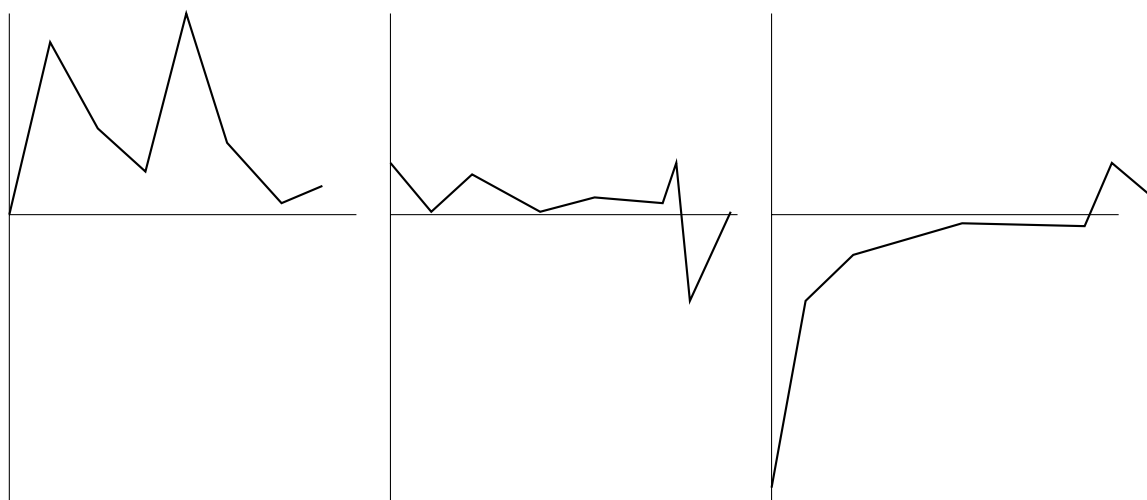


Figure 2 – Trois réalisations de $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$.

Partie 3

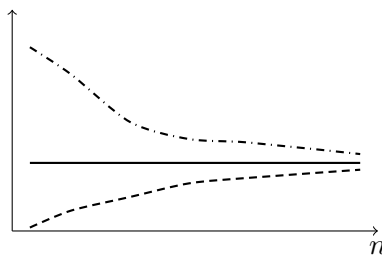
On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre réel a strictement positif.

On considère un paramètre réel M strictement positif, et l'on pose, pour tout entier naturel non nul n ,

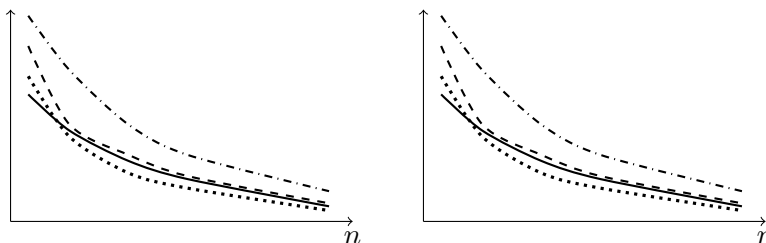
$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_n| \leq M, \\ 0 & \text{si } |X_n| > M. \end{cases} \quad \bar{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

13. Déterminer la loi de Y_n , d'abord en fonction de $F(M)$, puis uniquement en fonction de a et de M .
14. Démontrer que $\bar{Y}_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $p(a) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{M}{a} \right)$.

15. a) Justifier que $0 < p(a) < 1$ et que $p(a)(1 - p(a)) \leq \frac{1}{4}$.
- b) On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée-réduite. Montrer qu'il existe un unique réel z strictement positif vérifiant $\Phi(z) = 0,975$.
- c) Construire un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance 95% de $\arctan\left(\frac{M}{a}\right)$.
- d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance 95% de a .
16. On a représenté l'évolution de ces intervalles de confiance de a pour les valeurs de $a = M = 1$ sur la figure 3. Commenter cette figure.

Figure 3 – Évolution des intervalles de confiance pour $a = M = 1$.

17. Quelle(s) qualité(s) attend-on d'un intervalle de confiance ? Commenter la figure 4 quant au choix du paramètre M .

Figure 4 – Évolution des intervalles de confiance pour différentes valeurs de $\frac{M}{a}$.