

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2024

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations E et V désignent l'espérance et la variance ; Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1 – Une fonction de n variables

Exercice 1 – La matrice J_n et la fonction f_n

$J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1, V_n est la colonne de 1 et $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_k x_k^2 - (\frac{1}{n} \sum_k x_k)^2$. On note $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Éléments propres de J_n .

- a) Toutes les colonnes de J_n sont égales à $V_n \neq 0$: $\text{rg}(J_n) = 1$. Comme $1 < n$, J_n n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre, et par le théorème du rang $\dim \text{Ker}(J_n) = n - 1$.

$$\text{rg}(J_n) = 1, \quad 0 \in \text{Sp}(J_n), \quad \dim E_0(J_n) = n - 1.$$

- b) Chaque coefficient de $J_n V_n$ vaut $\sum_{k=1}^n 1 = n$, donc $J_n V_n = n V_n$ avec $V_n \neq 0$:

$$V_n \text{ est un vecteur propre de } J_n \text{ associé à la valeur propre } n.$$

- c) Les sous-espaces propres sont en somme directe et $\dim E_0 + \dim E_n \geq (n - 1) + 1 = n$: il n'y a pas d'autre valeur propre (un autre sous-espace propre, non réduit à $\{0\}$, ferait dépasser la dimension n).

$$\text{Sp}(J_n) = \{0, n\}, \quad E_n(J_n) = \text{Vect}(V_n).$$

2. Régularité.

f_n est une fonction polynomiale des coordonnées $x_1, \dots, x_n$:

$$f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

3. Points critiques.

- a) Pour tout i , $\partial_i \left(\sum_k x_k^2 \right) = 2x_i$ et $\partial_i \left(\left(\frac{1}{n} \sum_k x_k \right)^2 \right) = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \bar{x}$, d'où

$$\partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{2}{n} (x_i - \bar{x}).$$

- b) x est critique si et seulement si $x_i = \bar{x}$ pour tout i , c'est-à-dire si toutes les coordonnées sont égales. Réciproquement, si $x = (a, \dots, a)$, alors $\bar{x} = a$ et toutes les dérivées partielles sont nulles.

Les points critiques de f_n sont les $(a, a, \dots, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

4. Hessienne.

- a) En dérivant $\partial_i f_n(x) = \frac{2}{n}x_i - \frac{2}{n^2} \sum_k x_k$ par rapport à x_j :

$$\partial_j \partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} \delta_{i,j} - \frac{2}{n^2} = \begin{cases} \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} & \text{si } i = j, \\ -\frac{2}{n^2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- b) Ces dérivées sont constantes ; la matrice hessienne en tout point vaut $\frac{2}{n}I_n - \frac{2}{n^2}J_n$:

$$\nabla^2 f_n(a, \dots, a) = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n).$$

- c) On utilise `np.eye` et `np.ones`, puis la formule de b).

```
n=int(input('entrez la valeur de n:'))
```

```
I=np.eye(n)
```

```
J=np.ones((n,n))
```

```
Hessienne=2/n**2*(n*I-J)
```

```
print(Hessienne)
```

- d) Notons $H = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n)$. Si $J_n X = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $HX = \frac{2}{n^2}(n - \lambda)X$; réciproquement, si $HX = \mu X$, alors $J_n X = (n - \frac{n^2 \mu}{2})X$. Les valeurs propres de H sont donc les $\frac{2}{n^2}(n - \lambda)$, $\lambda \in \{0, n\}$:

$$\text{Sp}(\nabla^2 f_n(a, \dots, a)) = \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

La hessienne admet la valeur propre 0 : la condition suffisante du second ordre (valeurs propres toutes strictement positives, ou toutes strictement négatives) n'est pas vérifiée, et cette méthode ne permet pas de conclure.

5. Minimum global.

- a) On applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz à $u = (1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$: $\langle u, x \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|x\|^2$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

- b) On a $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \left(n \sum_k x_k^2 - \left(\sum_k x_k \right)^2 \right) \geq 0$ par a), et $f_n(a, \dots, a) = a^2 - a^2 = 0$.

$$\min_{\mathbb{R}^n} f_n = 0, \text{ atteint en chaque point critique } (a, \dots, a).$$

6. Le cas $n = 2$.

a) On traduit la définition de $f_2 : f_2(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

```
def f_2(x,y):
    z=(x**2+y**2)/2-((x+y)/2)**2
    return z
```

b) On a $f_2(x, y) = \frac{2x^2+2y^2-(x+y)^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4}$. Cette fonction est positive, nulle sur toute la droite $y = x$, et sur $[-2, 2]^2$ son maximum vaut $\frac{4^2}{4} = 4$, atteint en $(2, -2)$ et $(-2, 2)$. La surface 3 prend des valeurs négatives ; la surface 2 n'est nulle qu'en un seul point (fond « en cuvette ») ; la surface 1 est positive, à valeurs dans $[0, 4]$ sur $[-2, 2]^2$ et nulle le long d'une diagonale.

C'est la surface 1.

Exercice 2 – Une loi définie à l'aide de l'arctangente

Exercice 2 – Densité $f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$

X a pour densité f , $Y = e^X$, $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Question préliminaire.

a)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) Posons $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x})$ sur $]0, +\infty[$. h est dérivable et $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, h est constante, égale à $h(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$.

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c) Arctan est dérivable en 0 et $\text{Arctan}(0) = 0$: $\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x-0} \rightarrow \text{Arctan}'(0) = 1$.

$$\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x.$$

2. Une densité.

a) f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x)$. Pour $A, B > 0$,

$$\int_{-A}^B f(x) dx = \frac{2}{\pi} (\text{Arctan}(e^B) - \text{Arctan}(e^{-A})) \xrightarrow{A, B \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et vaut } 1.$$

b) f est positive, continue sur $\mathbb{R}$, d'intégrale égale à 1 :

$$f \text{ est une densité de probabilité.}$$

3. Fonction de répartition.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} (\text{Arctan}(e^x) - \text{Arctan}(e^{-A}))$:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x).$$

4. Simulation.

a) F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $F' = f > 0$), de limites $\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(0) = 0$ en $-\infty$ et $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection,

$$F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, 1[.$$

- b) U est à valeurs dans $]0, 1[$. Pour $u \in]0, 1[$, $[U \leq u] = [X \leq F^{-1}(u)]$ (F strictement croissante), donc $P(U \leq u) = F(F^{-1}(u)) = u$; $P(U \leq u) = 0$ si $u \leq 0$ et 1 si $u \geq 1$.

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).$$

- c) Pour $y \in]0, 1[$, $\frac{\pi y}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x) = y \iff e^x = \tan\left(\frac{\pi y}{2}\right) \iff x = \ln \tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ (car $\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right) > 0$). Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x) : F^{-1}(U)$ suit la loi de X .

$$F^{-1}(y) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right).$$

def simulX():

 U = rd.random()

 return np.log(np.tan(np.pi*U/2))

(La valeur $U = 0$, renvoyée avec une probabilité nulle, est sans incidence.)

5. Moments.

- a) Pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq e^{|x|}$, donc $0 \leq |x|f(x) \leq \frac{2}{\pi}|x|e^{-|x|}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \Gamma(2) = 1$ converge ; par parité et comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge. X admet donc une espérance, et comme f est paire, $x \mapsto xf(x)$ est impaire :

$$E(X) = 0.$$

- b) De même, $0 \leq x^2 f(x) \leq \frac{2}{\pi} x^2 e^{-|x|}$ et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2$ converge :

$$X^2 \text{ admet une espérance (théorème de transfert).}$$

6. Calcul de la variance.

- a) Le changement de variable $u = nt$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]0, +\infty[$ sur lui-même, montre que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ a la même nature que $\frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \frac{\Gamma(3)}{n^3}$, qui converge :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

- b) Pour $t \geq 0$, $\frac{1}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$. Par somme géométrique de raison $-e^{-2t} \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k e^{-(2k+1)t} = e^{-t} \frac{1 - (-e^{-2t})^{p+1}}{1 + e^{-2t}} = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}} + (-1)^p \frac{e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}}.$$

On multiplie par t^2 et on intègre sur $[0, +\infty[$; toutes les intégrales convergent (a), question 5.b, et $0 \leq \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}$, d'où par linéarité

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt.$$

- c) Par la majoration précédente et a), $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq \frac{2}{(2p+3)^3} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0.$$

- d) Par a), b) et c), $\sum_{k=0}^p \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^3} \rightarrow I$: la série converge et $I = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$. Comme $E(X) = 0$ et que $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire, $V(X) = E(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{4}{\pi} I$. Ainsi

$$V(X) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{32}, \quad \boxed{V(X) = \frac{\pi^2}{4}}.$$

7. La variable $Y = e^X$ et son maximum.

- a) Y est à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc $G(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $x > 0$, $G(x) = P(X \leq \ln x) = F(\ln x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)$. G est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0 : $\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(0) = 0$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$: Y est à densité, et en dérivant,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- b) $[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [Y_i \leq x]$ et, par indépendance, $G_n(x) = G(x)^n$:

$$\boxed{G_n(x) = \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right)^n \text{ si } x > 0, \quad G_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.}$$

- c) Notons $Z_n = \frac{n}{M_n}$, bien défini car $M_n > 0$. Pour $x \leq 0$, $P(Z_n \leq x) = 0$. Pour $x > 0$, comme M_n est à densité,

$$P(Z_n \leq x) = P\left(M_n \geq \frac{n}{x}\right) = 1 - G_n\left(\frac{n}{x}\right) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n,$$

grâce à 1.b. Posons $v_n = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow 0$. Par 1.c, $v_n \sim \frac{2x}{\pi n}$, et $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$, donc $n \ln(1 - v_n) \sim -nv_n \rightarrow -\frac{2x}{\pi}$. Par continuité de l'exponentielle, $(1 - v_n)^n \rightarrow e^{-2x/\pi}$. Ainsi $P(Z_n \leq x) \rightarrow 1 - e^{-2x/\pi}$ pour $x > 0$, et 0 pour $x \leq 0$: on reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)$, continue sur $\mathbb{R}$. Par définition de la convergence en loi,

$$\boxed{\frac{n}{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)}.$$

Exercice 3 – Un endomorphisme symétrique

Exercice 3 – $f(x) = \sum_i \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i$

$(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale, $U = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, les λ_i sont non nuls et $K = \sqrt{\sum_i \lambda_i^2}$.

Corrigé – Exercice 3.

Partie 1 : étude de f

1. Endomorphisme symétrique.

Par linéarité du produit scalaire en x , f est linéaire, et elle est à valeurs dans E . Pour $x, y \in E$,

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle,$$

expression symétrique en x et y , donc égale à $\langle f(y), x \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

f est un endomorphisme symétrique de E .

2. Cas $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$.

$f(x) = \sum_i \langle u_i, x \rangle u_i$; $(u_1, \dots, u_p)$ étant une base orthonormée de U ,

f est la projection orthogonale sur U .

3. Noyau et image.

a) La famille (u_i) étant libre, $f(x) = 0 \iff \forall i, \lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0 \iff \forall i, \langle u_i, x \rangle = 0$ (car $\lambda_i \neq 0$), c'est-à-dire $x \in U^\perp$.

$$\text{Ker}(f) = U^\perp, \quad \dim \text{Ker}(f) = \dim E - p.$$

b) Par le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim E - (\dim E - p) = p$. Or $\text{Im}(f) \subset U$ (chaque $f(x)$ est combinaison des u_i) et $\dim U = p$:

$$\text{rg}(f) = p, \quad \text{Im}(f) = U.$$

4. Valeurs propres.

$f(u_j) = \sum_i \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle u_i = \lambda_j u_j$ et $u_j \neq 0$ (de norme 1) :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_j \in \text{Sp}(f), \quad u_j \text{ est un vecteur propre associé.}$$

Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de E

5. Unicité de la limite.

Si (y_n) converge vers y et vers y' , l'inégalité triangulaire donne $0 \leq \|y - y'\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - y'\| \rightarrow 0$. Par encadrement, $\|y - y'\| = 0$:

$$y = y'.$$

6. Majoration de $\|f(x)\|$.

La famille (u_i) étant orthonormale, le théorème de Pythagore donne

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\langle u_i, x \rangle^2 \leq \|u_i\|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2$, donc $\|f(x)\|^2 \leq K^2 \|x\|^2$:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2, \quad \|f(x)\| \leq K \|x\|.$$

7. La suite $x_{n+1} = f(x_n)$.

- a) Par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$, et si $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$, alors $\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq K \|x_n\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leq K^n \|x_0\|.$$

- b) Comme $0 \leq K < 1$, $K^n \rightarrow 0$, donc $\|x_n - 0_E\| \rightarrow 0$ par encadrement :

$$(x_n) \text{ converge vers } 0_E.$$

- c) $0 \leq \|x_n\| \leq \|x_0\| K^n$, terme général d'une série géométrique convergente ($0 \leq K < 1$). Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\sum_n \|x_n\| \text{ converge.}$$

Problème – Intégrales de Wallis généralisées et pile ou face

Problème – $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, de sorte que $J_n = u_n + I_n$. X_n (resp. Y_n) est le nombre de piles (resp. faces) en $2n$ lancers.

Corrigé – Problème.

Partie 1

1. Monotonie.

- a) Pour $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$. Par positivité et croissance de l'intégrale ($0 < 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- b) La suite est décroissante et minorée par 0 ; par le théorème de la limite monotone,

$$(u_n) \text{ converge.}$$

2. Limite de (u_n) .

- a) Soit $\psi(x) = 1 + x - e^{x/2}$ sur $[0, 1]$: $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{x/2} \geq 1 - \frac{\sqrt{e}}{2} > 0$ car $e < 4$. ψ est croissante et $\psi(0) = 0$, donc $\psi \geq 0$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^{x/2} \leq 1 + x.$$

- b) Pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \in [0, 1]$, donc $1 + t^2 \geq e^{t^2/2} > 0$, puis $(1 + t^2)^n \geq e^{nt^2/2}$ et $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}$. En intégrant :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

- c) $t \mapsto \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2/2}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, d'intégrale 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

- d) Par positivité et parité, $\int_0^1 e^{-nt^2/2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Ainsi $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ pour $n \geq 1$, et par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Partie 2

3. Convergence de J_n .

Pour $n \geq 1$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or $\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(A) \rightarrow \frac{\pi}{2}$: par comparaison de fonctions positives,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \text{ converge.}$$

4. Limites de I_n et J_n .

a) Pour $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = \frac{1}{2n-1}$ ($2n > 1$) :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}.$$

b) Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) $J_n = u_n + I_n$ (relation de Chasles) et la question 2.d donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

5. Relation de récurrence.

a) Soit $A > 0$. On intègre par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u(t) = t$ et $v(t) = (1+t^2)^{-n}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt, \end{aligned}$$

en écrivant $t^2 = (1+t^2) - 1$. Comme $n \geq 1$, $\frac{A}{(1+A^2)^n} \leq \frac{A}{1+A^2} \rightarrow 0$; en faisant tendre A vers $+\infty$:

$$J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

b)

$$J_1 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}.$$

c) D'après a), $\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$. Par télescopage, $\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = 2(J_1 - J_{N+1}) \rightarrow 2J_1 = \pi$, car $J_{N+1} \rightarrow 0$ (4.c).

$$\sum_{n \geq 1} \frac{J_n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi.$$

d) D'après a), $J_{n+1} = J_n - \frac{J_n}{2n} = \frac{2n-1}{2n} J_n$, soit $J_k = \frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

def suiteJ(n):

 J=np.pi/2

 for k in range(2,n+1):

 J=J*(2*k-3)/(2*k-2)

 return J

6. Expression de J_{n+1} .

Par récurrence sur n . Pour $n = 0$: $J_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{0}{0}}{4^0}$. Si la formule est vraie au rang n , la relation 5.d au rang $n + 1$ donne

$$J_{n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)},$$

$$\text{et } \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Partie 3**7. Autant de piles que de faces.**

- a) X_n compte les succès (« pile », de probabilité $\frac{1}{2}$) dans $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes :

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right).$$

- b) $X_n + Y_n = 2n$, donc $[X_n = Y_n] = [X_n = n]$ et

$$P(X_n = Y_n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{2}{\pi} J_{n+1}, \quad \boxed{P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

- c) La pièce étant équilibrée, les rôles de « pile » et « face » sont symétriques : Y_n suit la même loi que X_n , et $[X_n > Y_n] = [Y_n < n]$, $[X_n < Y_n] = [X_n < n]$.

$$\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n < n) = P(Y_n < n) = P(X_n > Y_n).}$$

- d) Les événements $[X_n < Y_n]$, $[X_n = Y_n]$, $[X_n > Y_n]$ forment un système complet, donc $2P(X_n < Y_n) = 1 - P(X_n = Y_n) \rightarrow 1$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}.$$

8. Avec le théorème central limite.

- a) $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ compte les lancers, parmi les $2n$ premiers, ayant donné « pile » :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n.$$

- b) Les Z_k sont indépendantes, de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4} > 0$. Par le théorème central limite, $S_m^* = \frac{\sum_{k=1}^m Z_k - \frac{m}{2}}{\frac{\sqrt{m}}{2}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$; il en est de même de la suite extraite $S_{2n}^* = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}/2}$ (les fonctions de répartition convergent en tout point). Or $[X_n \leq Y_n] = [X_n \leq n] = [S_{2n}^* \leq 0]$ et, Φ étant continue en 0,

$$P(X_n \leq Y_n) = P(S_{2n}^* \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0), \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}.$$

c) $P(X_n < Y_n) = P(X_n \leq Y_n) - P(X_n = Y_n) \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ (question 7.b) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}.$$