

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2024

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. On note Tr la trace, E et V l'espérance et la variance, Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Problème 1 – Racines carrées de matrices

Problème 1 – Équation $M^2 = A$ et méthode de Newton matricielle

On cherche les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$, puis on étudie la suite $M_{k+1} = \frac{1}{2}(M_k + M_k^{-1})$.

Corrigé – Problème 1.

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

1. Commutation.

$$AM = M^2M = M^3 = MM^2 = MA :$$

$$AM = MA.$$

2. Inversibilité.

Si M est inversible, $A = M^2$ l'est (produit de matrices inversibles), d'inverse $(M^{-1})^2$. Réciproquement, si A est inversible, $M(MA^{-1}) = M^2A^{-1} = I_n$: la matrice carrée M admet un inverse à droite, donc est inversible.

$$A \text{ inversible} \iff M \text{ inversible.}$$

3. Exemple en taille 2.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Ainsi $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A ; les valeurs propres de A en sont racines, or $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle : $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

$$A^2 = -I_2, \quad A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$. Si $M^2 = A$: $b(a+d) = 1$ impose $a+d \neq 0$; $c(a+d) = -1 = -b(a+d)$ donne $c = -b$; enfin $a^2 + bc = 0 = bc + d^2$ donne $(a-d)(a+d) = 0$, donc $a = d$.

$$a = d \quad \text{et} \quad b = -c.$$

- c) Avec $d = a$ et $c = -b$, $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$. Donc $M^2 = A \iff a^2 = b^2$ et $2ab = 1$. Si $b = -a$, $-2a^2 = 1$ est impossible ; donc $b = a$ et $2a^2 = 1$, soit $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Réciproquement ces matrices conviennent.

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Une matrice sans racine carrée.

- a) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$. Le polynôme X^3 annule A , donc $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle : ce n'est pas le cas.

A n'est pas diagonalisable.

- b) $M^4 = (M^2)^2 = A^2 \neq 0$ et $M^6 = (M^2)^3 = A^3 = 0$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* : M^k = 0\}$ contient 6, donc p existe ; comme $M^k = 0$ entraîne $M^4 = M^{4-k}M^k = 0$ pour $k \leq 4$, on a $p \geq 5$.

$$M^4 \neq 0, \quad M^6 = 0, \quad 5 \leq p \leq 6.$$

- c) Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe u tel que $f^{p-1}(u) \neq 0$; en particulier $u \neq 0$. Soient $c_0, \dots, c_{p-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} c_k f^k(u) = 0$. Supposons les c_k non tous nuls et soit j le plus petit indice tel que $c_j \neq 0$. En appliquant f^{p-1-j} , les termes d'indice $k > j$ donnent $f^{p-1+(k-j)}(u) = 0$ (exposant $\geq p$) ; il reste $c_j f^{p-1}(u) = 0$, d'où $c_j = 0$: contradiction.

$(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

- d) On obtient une famille libre de $p \geq 5$ vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3 : c'est absurde.

L'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

5. Les solutions de $M^2 = I_n$.

- a) $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de M ; les valeurs propres de M en sont racines :

$$\text{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}.$$

- b) Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \frac{x+f(x)}{2} + \frac{x-f(x)}{2}$, avec, puisque $f^2 = \text{id}$, $(f - \text{id})(\frac{x+f(x)}{2}) = \frac{f^2(x)-x}{2} = 0$ et $(f + \text{id})(\frac{x-f(x)}{2}) = \frac{x-f^2(x)}{2} = 0$. Si $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, alors $x = 0$.

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}).$$

- c) En concaténant une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$ et une base de $\text{Ker}(f + \text{id})$, on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f :

M est diagonalisable.

- d) Si $M^2 = I_n$, par c) et a), $M = P\Delta P^{-1}$ avec P inversible et $\Delta = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, $(P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PI_n P^{-1} = I_n$.

$$\{M : M^2 = I_n\} = \{P \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P^{-1} : P \text{ inversible, } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}.$$

6. Cas de n valeurs propres distinctes.

- a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad P \text{ inversible.}$$

- b) $M = PNP^{-1}$, donc $M^2 = PN^2P^{-1}$, et $M^2 = A = PDP^{-1} \iff PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \iff N^2 = D$ (P inversible).

$$M^2 = A \iff N^2 = D.$$

- c) Si $N^2 = D$, la question 1 (appliquée à D et N) donne $ND = DN$. Le coefficient (i, j) s'écrit $(N)_{i,j}\lambda_j = \lambda_i(N)_{i,j}$, d'où $(N)_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$ et $(N)_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ (valeurs propres distinctes).

$$N \text{ est diagonale.}$$

- d) Si $N = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $N^2 = D \iff \forall i, \mu_i^2 = \lambda_i$. Si un λ_i est strictement négatif, c'est impossible :

$$\text{pas de solution si } A \text{ a une valeur propre strictement négative.}$$

- e) Si tous les λ_i sont positifs ou nuls, $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$, et

$$\{M : M^2 = A\} = \{P \text{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})P^{-1} : \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\},$$

ce qui fait 2^n solutions distinctes si tous les λ_i sont strictement positifs, et 2^{n-1} si $\lambda_1 = 0$.

7. Racine carrée symétrique positive.

- a) Par le théorème spectral, $A = QDQ^{-1}$ avec Q orthogonale ($Q^{-1} = {}^tQ$) et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$. Posons $M = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^tQ : {}^tM = M$, ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et $M^2 = QDQ^{-1} = A$.

$$M = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^tQ \text{ convient.}$$

- b) i) M_1 et M_2 sont symétriques réelles : par le théorème spectral, elles sont diagonalisables dans des bases orthonormées.

$$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}, \quad M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}, \quad P_1, P_2 \text{ orthogonales.}$$

- ii) $M_1^2 = M_2^2 = A$ donne $P_1 D_1^2 P_1^{-1} = P_2 D_2^2 P_2^{-1}$, puis, en multipliant à gauche par P_1^{-1} et à droite par P_2 , $D_1^2 P = P D_2^2$. Coefficient par coefficient :

$$D_1^2 P = P D_2^2, \quad a_i^2(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2.$$

- iii) Si $(P)_{i,j} \neq 0$, alors $a_i^2 = b_j^2$, donc $a_i = b_j$ (tous deux strictement positifs) ; si $(P)_{i,j} = 0$, l'égalité est triviale. Ainsi $a_i(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$ pour tout (i, j) , c'est-à-dire

$$D_1 P = P D_2.$$

iv) $D_1 = PD_2P^{-1}$, donc $M_1 = P_1PD_2P^{-1}P_1^{-1} = P_2D_2P_2^{-1} = M_2$ (car $P_1P = P_2$).

$$M_1 = M_2.$$

Partie 2 : Une suite de matrices

8. Un produit scalaire.

$({}^tAB)_{j,j} = \sum_i A_{i,j}B_{i,j}$, donc $\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} A_{i,j}B_{i,j}$. Cette expression est bilinéaire, symétrique, et $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} A_{i,j}^2 \geq 0$, nul si et seulement si tous les $A_{i,j}$ sont nuls.

$$(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

9. Comparaison de normes.

Avec $\mu = \max_{i,j} |(M)_{i,j}|$, $\|M\|_2^2 = \sum_{i,j} (M)_{i,j}^2 \leq n^2 \mu^2$:

$$\|M\|_2 \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} |(M)_{i,j}|.$$

10. Passage à la limite dans un produit.

$(K_1M_kK_2)_{i,j} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (K_1)_{i,p}(M_k)_{p,q}(K_2)_{q,j}$ est une combinaison linéaire finie, à coefficients fixes, de suites convergentes ; elle converge vers $\sum_{p,q} (K_1)_{i,p}(L)_{p,q}(K_2)_{q,j} = (K_1LK_2)_{i,j}$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} K_1M_kK_2 = K_1LK_2.$$

11. La suite réelle $u_{m+1} = \varphi(u_m)$.

a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, impaire, et $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x^2}) = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2}$.

x	$-\infty$	-1	0	0	1	$+\infty$					
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$			
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\parallel$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Montrons par récurrence que, pour tout $m \geq 1$, u_m est bien défini et $u_m \geq 1$. On a $u_0 = a > 0$, donc $u_1 = \varphi(a)$ est défini et $\varphi(a) - 1 = \frac{(a-1)^2}{2a} \geq 0$. Si $u_m \geq 1$, alors $u_m \neq 0$, $u_{m+1} = \varphi(u_m)$ est défini et $u_{m+1} \geq 1$ par le même calcul.

$$a > 0 \implies \forall m \geq 1, u_m \geq 1 \text{ (donc } |u_m| \geq 1 \text{ et } u_m \text{ du signe de } a).$$

c) Pour $a > 0$ et $m \geq 1$: $u_{m+1} - u_m = \frac{1-u_m^2}{2u_m} \leq 0$. La suite $(u_m)_{m \geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 : elle converge (théorème de la limite monotone) vers $\varepsilon \geq 1$. Par continuité de φ en ε , $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$, soit $\varepsilon^2 = 1$, donc $\varepsilon = 1$. Si $a < 0$, l'impairité de φ montre que la suite associée à a est l'opposée de celle associée à $-a > 0$: elle est croissante et tend vers -1 .

$$(u_m)_{m \geq 1} \text{ est monotone et converge vers } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

d) Pour $|x| \geq 1$, $0 \leq 1 - \frac{1}{x^2} < 1$, donc

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

e) On suppose $|a| \geq \frac{1}{2}$; par imparité, on peut supposer $a > 0$, donc $\varepsilon = 1$. Le cas $m = 0$ est clair.

- *Passage de $m = 0$ à $m = 1$.* $|u_1 - 1| = \frac{(a-1)^2}{2a} = \frac{|a-1|}{2a} |a - 1| \leq \frac{1}{2} |a - 1|$, car $|a - 1| \leq a$ lorsque $a \geq \frac{1}{2}$.
- *Pour $m \geq 1$.* u_m et 1 appartiennent à $[1, +\infty[$, intervalle sur lequel $|\varphi'| \leq \frac{1}{2}$ (d). Par l'inégalité des accroissements finis, $|u_{m+1} - 1| = |\varphi(u_m) - \varphi(1)| \leq \frac{1}{2} |u_m - 1|$.

Par récurrence immédiate :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad |u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|.$$

12. La suite matricielle.

a) A est symétrique réelle : par le théorème spectral, il existe P orthogonale telle que $D_0 = P^{-1}AP$ soit diagonale. Ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A , non nulles car A est inversible.

$$D_0 = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i \neq 0.$$

b) Par récurrence : $M_0 = A$ et D_0 conviennent. Si M_k est définie et $D_k = P^{-1}M_kP = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ est diagonale inversible, alors $M_k = PD_kP^{-1}$ est inversible, $M_k^{-1} = PD_k^{-1}P^{-1}$, M_{k+1} est définie et

$$D_{k+1} = P^{-1}M_{k+1}P = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1}) = \text{diag}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_n)),$$

diagonale, inversible car $|\varphi(d_i)| \geq 1$ (11.b).

$$D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1}), \quad D_k \text{ diagonale inversible.}$$

c) D'après b), $(D_k)_{i,i} = u_k^{(i)}$, où $(u_k^{(i)})$ est la suite de la question 11 de premier terme $a = \lambda_i$. Elle converge vers $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ (signe de λ_i). Ainsi $D_k \rightarrow \Delta = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ coefficient par coefficient et, par 10, $M_k = PD_kP^{-1} \rightarrow L = P\Delta P^{-1}$, avec $L^2 = P\Delta^2P^{-1} = I_n$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = L = P\Delta P^{-1}, \quad L^2 = I_n.$$

d) On suppose ici que toute valeur propre λ_i vérifie $|\lambda_i| \geq \frac{1}{2}$. Par 11.e, pour tout l , $|u_k^{(l)} - \varepsilon_l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |\lambda_l - \varepsilon_l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A))$.

i) $M_k - L = P(D_k - \Delta)^t P$ (P orthogonale), donc $(M_k - L)_{i,j} = \sum_{l=1}^n P_{i,l} P_{j,l} (u_k^{(l)} - \varepsilon_l)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que les lignes de P sont de norme 1,

$$|(M_k - L)_{i,j}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)) \sum_l |P_{i,l}| |P_{j,l}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)).$$

La question 9 donne alors

$$\|M_k - L\|_2 \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)).$$

- ii) $C = M_k - L = P(D_k - \Delta)^t P$ est symétrique et ${}^t C C = P(D_k - \Delta)^{2t} P$. La trace étant invariante par similitude,

$$\|C\|_2^2 = \text{Tr}((D_k - \Delta)^2) = \sum_{l=1}^n (u_k^{(l)} - \varepsilon_l)^2 \leq n \left(\frac{1}{4}\right)^k (1 + \rho(A))^2,$$

$$\|M_k - L\|_2 \leq \sqrt{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)).$$

- e) $\rho(A) = \max(x, -y)$ où x et y sont la plus grande et la plus petite valeur propre. On itère jusqu'à ce que le majorant de d.ii soit inférieur à 10^{-3} .

```
def suite_matricielle(A):
    n = len(A)
    v = al.eig(A)[0]
    x, y = max(v), min(v)
    U, k = A, 0
    rho = max(x, -y)
    while np.sqrt(n)*(1/2)**k*(1+rho) > 10**(-3):
        k = k+1
        U = (U + al.inv(U))/2
    return U
```

La fonction renvoie M_k avec $\|M_k - L\|_2 \leq 10^{-3}$.

Problème 2 – Sommes d'exponentielles et formule de Stirling

Problème 2 – $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$W_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}, \quad Z_n = \frac{n}{S_n}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!}, \quad R(u) = \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}.$$

Corrigé – Problème 2.

Partie 1 : Préliminaires

1. Les intégrales I_m .

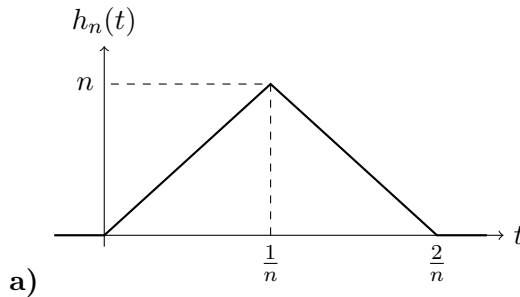
$I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 = 0!$. Supposons que I_m converge et vaut $m!$. Pour $A > 0$, on intègre par parties sur $[0, A]$ avec $u(t) = t^{m+1}$, $v(t) = -e^{-t}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(t) = (m+1)t^m$, $v'(t) = e^{-t}$:

$$\int_0^A t^{m+1} e^{-t} dt = -A^{m+1} e^{-A} + (m+1) \int_0^A t^m e^{-t} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} (m+1) I_m,$$

par croissances comparées. Donc I_{m+1} converge et vaut $(m+1)!$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = m!}.$$

2. Une suite de densités « en triangle ».



h_n est positive, continue sur $\mathbb{R}$ (les morceaux se raccordent en $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}$), nulle hors de $]0, \frac{2}{n}]$, et

$$\int_0^{1/n} n^2 t dt + \int_{1/n}^{2/n} n^2 \left(\frac{2}{n} - t \right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

h_n est une densité de probabilité.

b) $h_n(0) = 0$. Si $t \in]0, 1]$, pour $n > \frac{2}{t}$, $t > \frac{2}{n}$ donc $h_n(t) = 0$.

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0.}$$

c) Pour $n \geq 2$, $\frac{2}{n} \leq 1$ donc $\int_0^1 h_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n = 1$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt.}$$

Partie 2 : Étude de S_n

3. Moments de S_n .

Chaque Y_i admet une espérance $\frac{1}{\lambda}$ et une variance $\frac{1}{\lambda^2}$. Par linéarité, et par indépendance pour la variance :

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

4. Loi de S_n .

a) Pour $x \geq 0$, $P(X_i \leq x) = P(Y_i \leq \frac{x}{\lambda}) = 1 - e^{-x}$, et $P(X_i \leq x) = 0$ pour $x < 0$:

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1) = \gamma(1).$$

b) $\lambda S_1 = X_1 \hookrightarrow \gamma(1)$. Si $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$, alors $\lambda S_{n+1} = \lambda S_n + X_{n+1}$, avec λS_n (fonction de $Y_1, \dots, Y_n$) et X_{n+1} indépendantes (lemme des coalitions) ; par stabilité des lois gamma par somme, $\lambda S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n).$$

c) $\gamma(n)$ a pour densité $t \mapsto \frac{t^{n-1}e^{-t}}{\Gamma(n)}$ sur $]0, +\infty[$ (nulle ailleurs), avec $\Gamma(n) = (n-1)!$. Comme $S_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda S_n)$, la formule de densité d'une transformation affine donne $f_{S_n}(t) = \lambda f_{\lambda S_n}(\lambda t)$:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} \text{ si } t > 0, \quad f_{S_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq 0.$$

5. Moments de $1/S_n$.

$S_n > 0$ presque sûrement. Par le théorème de transfert, $\frac{1}{S_n^r}$ ($r \in \{1, 2\}$) admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} t^{-r} f_{S_n}(t) dt$ converge. Le changement de variable $u = \lambda t$ (de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $]0, +\infty[$ sur lui-même) montre que cette intégrale a la même nature que

$$\frac{\lambda^r}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1-r} e^{-u} du.$$

Près de $+\infty$ l'exponentielle assure la convergence ; près de 0, $u^{n-1-r} e^{-u} \sim u^{n-1-r}$, dont l'intégrale converge si et seulement si $n-1-r > -1$ (Riemann), c'est-à-dire $n > r$. Dans ce cas, la valeur est $\frac{\lambda^r (n-1-r)!}{(n-1)!}$ (question 1).

a)

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe} \iff n \geq 2, \quad E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda}{n-1}.$$

b) $E\left(\frac{1}{S_n^2}\right)$ existe si et seulement si $n \geq 3$, et vaut $\frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$. Par la formule de König-Huygens,

$$V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2},$$

$$V\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe} \iff n \geq 3, \quad V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

6. Densité de W_n .

$W_n = aS_n + b$ avec $a = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} > 0$ et $b = -\sqrt{n}$. Par la formule de densité d'une transformation affine, W_n est à densité et $f_{W_n}(t) = \frac{1}{a}f_{S_n}(\frac{t-b}{a})$, avec $\frac{t+\sqrt{n}}{\lambda/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}$:

$$f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\right).$$

7. Convergence en loi.

a) $W_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}}$, où les $X_i = \lambda Y_i$ sont indépendantes, de même loi $\mathcal{E}(1)$, d'espérance 1 et de variance 1. C'est la somme centrée réduite ; par le théorème central limite,

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

b) $\int_0^1 f_{W_n} = P(0 \leq W_n \leq 1) = F_{W_n}(1) - F_{W_n}(0)$. Par définition de la convergence en loi (Φ étant continue) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Partie 3 : Estimation de λ par maximum de vraisemblance**8. Vraisemblance.**

Pour $x > 0$, $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Donc

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k}, \quad \psi(\lambda, x_1, \dots, x_n) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k.$$

9. Absence de point critique.

ψ est somme de $n \ln \lambda$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$) et d'une fonction polynomiale : elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$. La dérivée partielle par rapport à la variable x_1 vaut $\partial_1 \psi(\lambda, x_1, \dots, x_n) = -\lambda < 0$: elle ne s'annule jamais.

$$\psi \text{ n'admet aucun point critique sur } (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}.$$

10. Maximum en λ .

Notons $s = \sum_k x_k > 0$. $\varphi(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda s$, $\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - s$, strictement positive sur $]0, \frac{n}{s}[$ et strictement négative sur $]\frac{n}{s}, +\infty[$: φ admet un maximum atteint en un unique point. Comme $L = \exp \circ \varphi$ et $\exp$ est croissante,

$$\hat{z} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n}, \quad \forall \lambda > 0, \quad L(\lambda, x_1, \dots, x_n) \leq L(\hat{z}, x_1, \dots, x_n).$$

11. Biais de Z_n .

Par la question 5 (et $n \geq 3$), $E(Z_n) = nE(\frac{1}{S_n}) = \frac{n}{n-1}\lambda$ et $V(Z_n) = n^2V(\frac{1}{S_n})$:

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda, \quad V(Z_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2.$$

Le biais $E(Z_n) - \lambda = \frac{\lambda}{n-1}$ est non nul mais tend vers 0 : Z_n est biaisé, asymptotiquement sans biais.

12. Estimateur sans biais.

$\tilde{Z}_n = \frac{n-1}{n} Z_n = \frac{n-1}{S_n}$ vérifie $E(\tilde{Z}_n) = \lambda$ et $V(\tilde{Z}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} V(Z_n) = \frac{\lambda^2}{n-2} \rightarrow 0$. Par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, $P(|\tilde{Z}_n - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda^2}{(n-2)\varepsilon^2} \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\tilde{Z}_n = \frac{n-1}{Y_1 + \dots + Y_n} \text{ est sans biais et convergent.}$$

13. Intervalle de confiance asymptotique.

On a $\frac{\lambda S_n}{n} = 1 + \frac{W_n}{\sqrt{n}}$ et $Z_n > 0$. Donc

$$Z_n \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq Z_n \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \iff 1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \frac{\lambda S_n}{n} \leq 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \iff -t_\alpha \leq W_n \leq t_\alpha.$$

Par 7.a et la définition de la convergence en loi, $1 - \alpha_n := P(-t_\alpha \leq W_n \leq t_\alpha) = F_{W_n}(t_\alpha) - F_{W_n}(-t_\alpha) \rightarrow 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$.

$$P\left(Z_n \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq Z_n \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha.$$

C'est un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

14. Fonction IdC.

On calcule $Z_n = n / \sum Y_i$ puis les deux bornes.

```
def IdC(alpha, Y):
    n = len(Y)
    Z = n/np.sum(Y)
    t = sp.ndtri(1-alpha/2)
    A = Z*(1-t/np.sqrt(n))
    B = Z*(1+t/np.sqrt(n))
    return [A, B]
```

15. Application.

Chaque segment est l'intervalle de confiance obtenu pour un mois, et chaque point marque la valeur annoncée $\lambda_0 = \frac{1}{10}$. Seuls 3 intervalles sur 12 contiennent 0,1 : pour 9 mois sur 12, on rejette l'hypothèse $\lambda = \frac{1}{10}$ au risque α . De plus, les 12 intervalles sont décalés vers la droite : leurs centres Z_n sont tous supérieurs à 0,1. Si λ valait 0,1, chaque centre serait supérieur à 0,1 avec une probabilité proche de $\frac{1}{2}$ (car $P(W_n < 0) \rightarrow \frac{1}{2}$), et ce pour les 12 lots indépendants avec une probabilité de l'ordre de 2^{-12} .

On rejette $\lambda = \frac{1}{10}$: λ est plutôt de l'ordre de 0,102 à 0,104, la durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ est inférieure à 10.

La production ne respecte donc pas la durée de vie annoncée.

Partie 4 : Une convergence sous le signe intégral**16. Convergence de (u_n) .**

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1} n!}{(n+1)! n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}$, donc $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) -$

1. La formule de Taylor–Young à l'ordre 3 en 0 donne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x)$,

avec $\epsilon(x) \rightarrow 0$. Avec $x = \frac{1}{n}$:

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{\epsilon(1/n)}{n^3}\right) - 1 = \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{\eta_n}{n^2},$$

où $\eta_n = \frac{1}{6n} + (1 + \frac{1}{2n})\epsilon(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$. Ainsi $n^2 v_n \rightarrow \frac{1}{12}$:

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

b) v_n est positif à partir d'un certain rang et équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente : $\sum v_n$ converge, de somme σ . Par télescopage, $\ln u_n = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \rightarrow \ln u_1 + \sigma$, et par continuité de l'exponentielle :

$$\sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge, } \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = u_1 e^\sigma > 0.$$

17. Expression de f_{W_n} .

Posons $s = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} t + \frac{n}{\lambda}$. On a $s > 0 \iff t > -\sqrt{n}$ et $\lambda s = n(1 + \frac{t}{\sqrt{n}})$. Pour $t > -\sqrt{n}$, par 6 et 4.c,

$$f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-n-\sqrt{n}t} n^{n-1} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1} \sqrt{n} e^{-n}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t},$$

et $\frac{n^{n-1} \sqrt{n} e^{-n}}{(n-1)!} = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} = \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}}$. Pour $t \leq -\sqrt{n}$, $f_{W_n}(t) = 0$.

$$f_{W_n}(t) = \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} \text{ si } t > -\sqrt{n}, \quad 0 \text{ sinon.}$$

18. Limite simple de f_{W_n} .

a) Avec $u = \frac{t}{\sqrt{n}} > -1$: $(1+u)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} = (1+u)^{-1} \exp(n \ln(1+u) - nu)$ et $n \ln(1+u) - nu = nR(u) - \frac{nu^2}{2} = nR(u) - \frac{t^2}{2}$. D'où

$$f_{W_n}(t) = u_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR(t/\sqrt{n})} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

b) R est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $R'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{u^2}{1+u}$. Pour $u \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $1+u \geq \frac{1}{2}$, donc $|R'(u)| \leq 2u^2$. Comme $R(0) = 0$, $|R(u)| = \left| \int_0^u R'(s) ds \right| \leq \left| \int_0^u 2s^2 ds \right| = \frac{2}{3}|u|^3$.

$$\forall u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \quad |R(u)| \leq M_1 |u|^3, \quad M_1 = \frac{2}{3}.$$

c) Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [-\frac{1}{2}, 1]$ et $t > -\sqrt{n}$. Alors $|nR(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leq M_1 \frac{|t|^3}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, donc $e^{nR(t/\sqrt{n})} \rightarrow 1$; de plus $(1 + \frac{t}{\sqrt{n}})^{-1} \rightarrow 1$ et $u_n \rightarrow \ell$. Par a) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{W_n}(t) = \ell \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \ell f_Z(t).$$

19. Passage à la limite dans l'intégrale.

- a) i) Sur $[0, 1]$, $1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \geq 1 > 0$ et $\frac{t}{\sqrt{n}} \in]-1, +\infty[$: g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$g'_n(t) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-2} e^{nR(t/\sqrt{n})} + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \sqrt{n} R' \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{nR(t/\sqrt{n})}.$$

Comme $0 < \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \leq 1$, l'inégalité triangulaire donne

$$|g'_n(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \left|R' \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\right) e^{nR(t/\sqrt{n})}.$$

- ii) Pour $u \in [0, 1]$, $|R'(u)| = \frac{u^2}{1+u} \leq u^2$:

$$M_2 = 1 \text{ convient.}$$

- iii) Pour $t \in [0, 1]$, $u = \frac{t}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$, et par 18.b, $nR(u) \leq nM_1 u^3 = M_1 \frac{t^3}{\sqrt{n}} \leq M_1$, d'où $e^{nR(t/\sqrt{n})} \leq e^{M_1}$. Avec ii),

$$|g'_n(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} M_2 \frac{t^2}{n}\right) e^{M_1} \leq \frac{(1 + M_2) e^{M_1}}{\sqrt{n}}.$$

Comme $g_n(0) = 1$ ($R(0) = 0$), l'inégalité des accroissements finis sur $[0, t]$ donne $|g_n(t) - 1| \leq \frac{(1+M_2)e^{M_1}}{\sqrt{n}} t$:

$$|g_n(t) - 1| \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}}, \quad C_1 = (1 + M_2) e^{M_1}.$$

- iv) $|g_n(t)| \leq 1 + |g_n(t) - 1| \leq 1 + C_1$:

$$|g_n(t)| \leq C_2, \quad C_2 = 1 + C_1.$$

- b) Pour $t \in [0, 1]$, 18.a s'écrit $f_{W_n}(t) = u_n g_n(t) f_Z(t)$, donc $f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t) = (u_n g_n(t) - \ell) f_Z(t) = ((u_n - \ell) g_n(t) + \ell(g_n(t) - 1)) f_Z(t)$. Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale ($f_Z \geq 0$, $\ell > 0$),

$$\left| \int_0^1 f_{W_n}(t) dt - \int_0^1 \ell f_Z(t) dt \right| \leq \left(C_2 |u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 f_Z(t) dt.$$

- c) Le majorant tend vers 0 car $u_n \rightarrow \ell$ (16.b). Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \ell \int_0^1 f_Z(t) dt.$$

20. Valeur de ℓ et formule de Stirling.

Par 7.b et 19.c, et unicité de la limite, $\ell \int_0^1 f_Z = \int_0^1 f_Z$. Or $\int_0^1 f_Z > 0$ (f_Z continue strictement positive), donc $\ell = 1$, soit $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} \rightarrow 1$.

$$\ell = 1, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$