

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2024

Table des matières

1	Existence des matrices de Hadamard	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire ; Python.</i>	<i>2</i>
2	Variations aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.</i>	<i>5</i>
3	Deux propriétés des matrices de Hadamard	6
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.</i>	<i>6</i>

Notations. Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Si A est un ensemble fini non vide, on note $\#A$ le nombre d'éléments de A . Si $A = \emptyset$, on convient que $\#A = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket$, le coefficient situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée tA . Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a . Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|U\|$ sa norme euclidienne associée au produit scalaire canonique, c'est-à-dire $\|U\|^2 = {}^tUU$.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance, si elles existent.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQQ = I_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n .
- Pour tous $i, k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$, et $\delta_{i,k} = 0$ sinon.
- Dans tout le problème, $\|x\|$ désigne la norme d'un vecteur x , la nature du vecteur entre les doubles barres précisant de quelle norme il s'agit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on adopte les deux définitions suivantes tout au long de l'énoncé :

- Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de permutation* s'il existe une bijection σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
- Une matrice est *de Hadamard* si elle est carrée, si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et si ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

L'énoncé comporte trois parties essentiellement indépendantes.

1 Existence des matrices de Hadamard

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire ; Python.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On suppose dans toute cette partie qu'il existe une matrice de Hadamard $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ses vecteurs colonnes et $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ses vecteurs lignes.

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que tP est aussi une matrice de permutation.
2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$Q \text{ est une matrice de Hadamard} \iff {}^tQQ = nI_n \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, Q_{i,j}^2 = 1.$$

3. Montrer que tH est une matrice de Hadamard.
4. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ne comportant que les valeurs -1 et 1 sur sa diagonale, et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que PH , DH , HP et HD sont toutes des matrices de Hadamard.

5. En déduire qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \dots, 1)$.
6. En déduire que n est pair.
7. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard telle que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, S_{1,j} = 1$. Montrer que

$$\forall (i, m) \in \llbracket 2; n \rrbracket^2 \text{ tels que } i \neq m, \quad \sum_{k=1}^n (S_{i,k} + 1)(S_{m,k} + 1) = n.$$

8. En déduire que soit $n = 2$, soit n est un multiple de 4.
9. Dans le cas où $n > 2$, montrer qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont les trois premières lignes sont de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right).$$

On ne demande pas de montrer ici que les quatre blocs verticaux comportent le même nombre de colonnes. *Indication* : on peut observer que la permutation de certaines colonnes (ou la multiplication par -1 de certaines colonnes) dans une matrice de Hadamard donne encore une matrice de Hadamard, d'après la question 4 ci-dessus.

10. Montrer que les quatre blocs de la matrice de Hadamard de la question précédente comportent le même nombre de colonnes et en déduire à nouveau que n est nécessairement divisible par 4.
11. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ où $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on note $A \otimes B$ la matrice de $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ définie bloc par bloc par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \dots & A_{1,n}B \\ A_{2,1}B & \dots & A_{2,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1}B & \dots & A_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chacun des blocs $A_{i,j}B$ est de taille $k \times k$. Montrer que si A et B sont des matrices de Hadamard, alors $A \otimes B$ l'est aussi.

12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$.
13. La fonction `test_hadamard()` ci-dessous est écrite en Python. Elle est incomplète et a comme paramètre d'entrée une matrice M de coefficients entiers représentée par un tableau bidimensionnel (de type `array`). Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hadamard()` renvoie -2 si M n'est pas carrée, -1 si M est carrée mais qu'au moins l'un de ses coefficients n'appartient pas à $\{-1, 1\}$, 0 si M est carrée, que ses coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$ mais que M n'est pas une matrice de Hadamard, et 1 si M est une matrice de Hadamard.

```

1 import numpy as np
2 def test_hadamard(M):
3     n, p = np.shape(M)
4     if .....:
5         return -2
6     else:
7         for i in range(0, .....):
8             for j in range(0, .....):
```

```

9         if ..... != 1:
10             return -1
11     for j in range(0, .....):
12         for k in range(...., n):
13             if np.dot(.....) != 0:
14                 return 0
15     return 1

```

14. On voudrait maintenant écrire en Python une fonction `rand_hadam()` qui cherche une matrice de Hadamard dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1 (ainsi, chacune des autres lignes comporte autant de 1 que de -1), et de taille $4m \times 4m$ où m est un entier donné en paramètre. Cette fonction a aussi un autre paramètre d'entrée `Nmax` désignant le nombre maximal de matrices à tester. On procède comme suit :

- On construit aléatoirement une matrice ne contenant que des -1 et 1 comme coefficients : pour chaque ligne (à partir de la deuxième ligne), on choisit successivement et aléatoirement les coefficients dans $\{-1, 1\}$ jusqu'à ce que le nombre de 1 ou le nombre de -1 dans la ligne atteigne $n/2 = 2m$. Si le nombre de coefficients égaux à 1 (respectivement -1) dans la ligne atteint $n/2$, on attribue à tous les coefficients restants de la ligne la valeur -1 (respectivement $+1$).
- En utilisant la fonction `test_hadamard()`, on teste si la matrice construite est de Hadamard. Si oui, la fonction renvoie cette matrice. Sinon, on refait la construction de la même manière, autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention d'une matrice de Hadamard, sans toutefois dépasser `Nmax`. Si ce nombre maximal est atteint sans trouver de matrice de Hadamard, la fonction `rand_hadam()` renvoie la matrice nulle de taille $4m \times 4m$.

Compléter les parties soulignées en pointillé de la fonction `rand_hadam()` ci-dessous.

```

1  import numpy.random as rd
2  def rand_hadam(m, Nmax):
3      n = 4*m
4      for tst in range(0, Nmax):
5          matpm = np.ones((n, n), dtype=int)
6          for i in range(....., n):
7              nb_un = 0
8              j = 0
9              while 2*nb_un < n and ..... < n:
10                 val = rd.randint(0, 2)
11                 nb_un += .....
12                 matpm[i,j] = 2*val-1
13                 j = .....
14             if (2*nb_un == n):
15                 for k in range(j, n):
16                     matpm[i,k] = .....
17             if (test_hadamard(matpm) == 1):
18                 return .....
19     return np.zeros((n, n), dtype=int)

```

2 Variables aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω désigne un univers fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité. On pose $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, où l'entier n , $n \geq 2$, désigne le nombre d'éléments de Ω . On suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ non vide et on pose $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur cet espace probabilisé. On suppose qu'il existe un entier naturel $\ell \geq 2$ et des variables aléatoires réelles $Z_1, \dots, Z_\ell$ vérifiant : pour tous $(i, j) \in \llbracket 1; \ell \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, Z_i et Z_j sont indépendantes, et pour tout $i \in \llbracket 1; \ell \rrbracket$, $\#Z_i(\Omega) \geq 2$. Pour tout $i \in \llbracket 1; \ell \rrbracket$, on pose $z_i = (Z_i(\omega_1), \dots, Z_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.

Pour tous vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle u; v \rangle = \sum_{k=1}^n p_k u_k v_k$, et $u_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

15. Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x; y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
16. Soit $i \in \llbracket 1; \ell \rrbracket$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ vérifiant $\mathbb{E}(a_i Z_i + b_i) = 0$ et $\mathbb{V}(a_i Z_i + b_i) = 1$. Dans la suite, on pose $X_i = a_i Z_i + b_i$ et $x_i = (X_i(\omega_1), \dots, X_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.
17. Soient V et W deux variables aléatoires réelles sur Ω . On pose $v = (V(\omega_1), \dots, V(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$ et $w = (W(\omega_1), \dots, W(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{E}(V) = \langle v; u_0 \rangle$ et $\mathbb{E}(VW) = \langle v; w \rangle$.
18. En déduire les relations, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; \ell \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i; u_0 \rangle = 0$, $\langle x_i; x_i \rangle = 1$ et $\langle x_i; x_j \rangle = 0$.
19. En déduire que $3 \leq \ell + 1 \leq n$.
20. Soit Z une variable aléatoire réelle d'espérance nulle. On pose $z = (Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$ et on suppose que $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, où $m = \#Z(\Omega) > 2$.
 - a. Montrer qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_m$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z = \alpha_k) \beta_k = 0$ et $\sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z = \alpha_k) \alpha_k \beta_k = 0$.
 - b. Montrer que l'application $T : Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \mapsto (Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) \in \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$.
 - c. En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $m - 1$ tel que $\mathbb{E}(Q(Z)) = 0$, $\mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0$ et $Q(Z)(\Omega) \neq \{0\}$.
21. On pose $r = \#\{i \in \llbracket 1; \ell \rrbracket \mid \#X_i(\Omega) > 2\}$.
 - a. Montrer que $\ell + r \leq n - 1$.
 - b. En déduire que $r \leq \frac{n-1}{2}$.
22. On suppose de plus dans cette question que $\ell = n - 1$ (nécessairement $n \geq 3$). On considère la matrice carrée réelle M de taille $n \times n$ dont les coefficients sont définis par $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, $M_{i,j} = X_i(\omega_j)$ et $M_{n,j} = 1$. On considère aussi la matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $D_{i,i} = \sqrt{p_i}$.
 - a. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\#X_i(\Omega) = 2$.
 - b. Soit $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Soient α_i et β_i deux réels tels que $X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\}$, $\alpha_i > \beta_i$, et soit $\theta_i \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(X_i = \alpha_i) = \theta_i$ et $\mathbb{P}(X_i = \beta_i) = 1 - \theta_i$. Montrer les deux relations $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}$ et $\beta_i = -\frac{1}{\alpha_i}$.

c. Montrer que la matrice MD est orthogonale.

d. Soit Y la variable aléatoire définie par $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Y(\omega_j) = \frac{1}{p_j}$. Montrer que $Y = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k^2$. En déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_i^3) = \sum_{k=1}^n X_i(\omega_k)$.

On reprend les notations de la question 22.b et on pose, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $m_i = \#\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid X_i(\omega_k) = \alpha_i\}$. Montrer que les trois affirmations suivantes sont nécessairement vraies :

$$(A1) \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{n - m_i - 1}{m_i - 1}} \quad \text{et} \quad \theta_i = \frac{m_i - 1}{n - 2}; \quad (A2) \quad n \geq 4; \quad (A3) \quad 2 \leq m_i \leq n - 2.$$

On suppose dans cette question que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = 1/n$. Montrer :

- i. n est nécessairement pair et $\theta_i = 1/2$;
- ii. M est une matrice de Hadamard.

3 Deux propriétés des matrices de Hadamard

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On considère la fonction $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $S(A)_{i,j} = \text{sgn}(A_{i,j})$, où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. On considère le produit scalaire $\langle A; B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ainsi que la norme associée $\|A\| = \sqrt{\langle A; A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2}$.

On note φ l'application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_{n^2}) = [x_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$. L'espace $\mathbb{R}^{n^2}$ est muni du produit scalaire canonique.

- 23. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.
- 24. Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^T A A)$.
- 25. Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \leq F(A) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

- 26. On pose $\mathcal{K}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \varphi(x) \in \mathcal{O}_n\}$. Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n^2}$.
- 27. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$, $|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq n\|x - y\|$.
- 28. En déduire que F admet un minimum global et un maximum global, atteints, sur $\mathcal{O}_n$. On note M_n^- (respectivement M_n^+) la valeur minimale (respectivement maximale) de F sur $\mathcal{O}_n$: $M_n^- = \min_{Q \in \mathcal{O}_n} F(Q)$ et $M_n^+ = \max_{Q \in \mathcal{O}_n} F(Q)$.
- 29. Montrer que $M_n^- = n$.
- 30. Trouver toutes les matrices $Q \in \mathcal{O}_n$ qui vérifient $F(Q) = n$.
- 31. Montrer que, pour toute matrice $Q \in \mathcal{O}_n$, $F(Q) = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2$.

32. En déduire que $M_n^+ \leq n\sqrt{n}$. Montrer que l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe au moins une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
33. En déduire que si n n'est pas un multiple de 4, alors $M_n^+ < n\sqrt{n}$.
34. On suppose ici $n = 3$. Pour tous réels α et β , on pose $U(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{pmatrix}$. Trouver tous les couples (α, β) pour lesquels $U(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}_3$ et en déduire un encadrement de M_3^+ (on note que $3\sqrt{3} \simeq 5,196152$).
35. On suppose dans cette question que n est pair.
- Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|x_i| = |y_i| = 1$ et $\langle x; y \rangle \neq 0$. Montrer que $|\langle x; y \rangle| \geq 2$.
 - Soient x, y, u, v quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle| \leq \sqrt{2} \left(\|y\|^2 \|x - u\|^2 + \|u\|^2 \|y - v\|^2 \right)^{1/2}.$$
 - Soit $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $S(Q)$ n'est pas de Hadamard. Montrer que $\left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\| \geq \frac{2}{n^2}$.
 - En déduire que, s'il n'existe aucune matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M_n^+ \leq n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.