

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II – Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2024

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. On note $[x]$ la partie entière du réel x , $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance. La densité f est, comme toute densité, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ; sa fonction de répartition F est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en ces points, avec $F' = f$ là où f est continue.

Première partie – Statistiques d'ordre

Première partie – Lois des $X_{(n,k)}$ et convergence des quantiles empiriques

$(X_i)_{i \geq 1}$ est un échantillon de la loi de densité f , de fonction de répartition F , et $X_{(n,k)}$ est la k -ième plus petite valeur parmi $X_1, \dots, X_n$. Questions 1 à 7.

Corrigé – Première partie.

1. Lois du maximum et du minimum.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $[X_{(n,n)} \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$ et, par indépendance mutuelle,

$$F_{(n,n)}(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)^n.$$

La fonction F^n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : $X_{(n,n)}$ est à densité. En dérivant là où c'est possible,

$$F_{(n,n)} = F^n, \quad f_{(n,n)}(x) = n f(x) F(x)^{n-1}.$$

(On peut choisir arbitrairement la valeur aux points restants, par exemple celle de la formule.)

b) De même $[X_{(n,1)} > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x]$, donc $1 - F_{(n,1)}(x) = (1 - F(x))^n$, soit $F_{(n,1)} = 1 - (1 - F)^n$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, et

$$F_{(n,1)} = 1 - (1 - F)^n, \quad f_{(n,1)}(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$$

2. Fonction de répartition de $X_{(n,k)}$.

a) $Y_{i,x}$ prend les valeurs 0 et 1 et $\mathbb{P}(Y_{i,x} = 1) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)$:

$$Y_{i,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(F(x)).$$

b) Fixons $\omega \in \Omega$. La somme $\sum_i Y_{i,x}(\omega)$ compte les indices $i \leq n$ tels que $X_i(\omega) \leq x$.

- Si $X_{(n,k)}(\omega) \leq x$, alors $X_{(n,1)}(\omega) \leq \dots \leq X_{(n,k)}(\omega) \leq x$: au moins k des valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ (comptées avec leurs indices) sont inférieures ou égales à x , donc $\sum_i Y_{i,x}(\omega) \geq k$.
- Si $X_{(n,k)}(\omega) > x$, alors les $n - k + 1$ valeurs $X_{(n,k)}(\omega), \dots, X_{(n,n)}(\omega)$ sont strictement supérieures à x ; au plus $k - 1$ indices vérifient $X_i(\omega) \leq x$, donc $\sum_i Y_{i,x}(\omega) \leq k - 1$.

$$[X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right].$$

c) Les $Y_{i,x}$, fonctions respectives des X_i mutuellement indépendantes, sont mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{B}(F(x))$. Leur somme S suit donc la loi $\mathcal{B}(n, F(x))$, et

$$F_{(n,k)}(x) = \mathbb{P}(S \geq k) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1 - F(x))^{n-\ell}.$$

3. Densité de $X_{(n,k)}$.

a) Si $1 \leq \ell \leq n - 1$, on dérive le produit :

$$b'_{n,\ell}(z) = \binom{n}{\ell} \left(\ell z^{\ell-1} (1-z)^{n-\ell} - (n-\ell) z^\ell (1-z)^{n-\ell-1} \right).$$

Or $\ell \binom{n}{\ell} = n \binom{n-1}{\ell-1}$ et $(n-\ell) \binom{n}{\ell} = n \binom{n-1}{\ell}$, d'où

$$\begin{aligned} b'_{n,\ell}(z) &= n \left(\binom{n-1}{\ell-1} z^{\ell-1} (1-z)^{(n-1)-(\ell-1)} - \binom{n-1}{\ell} z^\ell (1-z)^{(n-1)-\ell} \right) \\ &= n(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)). \end{aligned}$$

Si $\ell = n$: $b_{n,n}(z) = z^n$, donc $b'_{n,n}(z) = n z^{n-1} = n b_{n-1,n-1}(z) = n(b_{n-1,n-1}(z) - b_{n-1,n}(z))$ avec la convention $b_{n-1,n} = 0$.

$$b'_{n,\ell} = n(b_{n-1,\ell-1} - b_{n-1,\ell}).$$

b) Par linéarité de la dérivation, la somme est télescopique :

$$a'_{n,k} = n \sum_{\ell=k}^n (b_{n-1,\ell-1} - b_{n-1,\ell}) = n(b_{n-1,k-1} - b_{n-1,n}), \quad \text{soit}$$

$$a'_{n,k} = n b_{n-1,k-1}.$$

c) D'après 2.c, $F_{(n,k)} = a_{n,k} \circ F$. Comme $a_{n,k}$ est polynomiale, $F_{(n,k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ là où F l'est, c'est-à-dire sauf en un nombre fini de points : $X_{(n,k)}$ est à densité. En ces points de dérivabilité,

$$F'_{(n,k)}(x) = f(x) a'_{n,k}(F(x)) = n f(x) b_{n-1,k-1}(F(x)).$$

$$f_{(n,k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}.$$

4. Comportement de $F_{(n, [\alpha n])}(x)$.

Notons $S_n = \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x)) : \mathbb{E}(S_n/n) = F(x)$ et $\mathbb{V}(S_n/n) = F(x)(1-F(x))/n$.
On considère $n \geq 1/\alpha$, de sorte que $1 \leq [\alpha n] \leq n$.

a) Comme $[\alpha n] > \alpha n - 1$, si $S_n \geq [\alpha n]$ alors

$$\frac{S_n}{n} - F(x) \geq \frac{[\alpha n]}{n} - F(x) > \alpha - F(x) - \frac{1}{n}.$$

Pour $n \geq \frac{1}{\alpha - F(x) - \varepsilon}$, on a $\alpha - F(x) - \frac{1}{n} \geq \varepsilon$, d'où l'inclusion

$$\boxed{[S_n \geq [\alpha n]] \subset \left[\left| \frac{S_n}{n} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}}$$

Avec 2.b et l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev :

$$0 \leq F_{(n, [\alpha n])}(x) = \mathbb{P}(S_n \geq [\alpha n]) \leq \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - F(x) \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{F(x)(1-F(x))}{n\varepsilon^2}.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [\alpha n])}(x) = 0.}$$

b) Si $\left| \frac{S_n}{n} - F(x) \right| < \varepsilon$, alors $\frac{S_n}{n} > F(x) - \varepsilon > \alpha$, donc $S_n > \alpha n \geq [\alpha n]$:

$$\boxed{[S_n \geq [\alpha n]] \supset \left[\left| \frac{S_n}{n} - F(x) \right| < \varepsilon \right].}$$

En passant aux probabilités et au complémentaire, puis avec Bienaymé–Tchebychev,

$$1 \geq F_{(n, [\alpha n])}(x) \geq 1 - \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - F(x) \right| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{F(x)(1-F(x))}{n\varepsilon^2},$$

et le théorème d'encadrement donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [\alpha n])}(x) = 1.}$$

5. Convergence vers le quantile.

a) La densité f est continue sur I , donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $F' = f > 0$: F est continue et strictement croissante sur I . Si a est fini, $F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt = 0$ car f est nulle sur $] -\infty, a]$; par continuité, $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a^+$. Si $a = -\infty$, F tend vers 0 en $-\infty$. De même $F(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow b^-$ (si b est fini, $1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f = 0$). Par le théorème de la bijection, F réalise une bijection de I sur l'intervalle ouvert $] \lim_a F, \lim_b F[$:

$$\boxed{F|_I :]a, b[\longrightarrow]0, 1[\text{ est bijective (strictement croissante).}}$$

b) Posons $c = F^{-1}(\alpha) \in I$. La fonction de répartition de la variable certaine égale à c vaut 0 sur $] -\infty, c[$ et 1 sur $[c, +\infty[$; ses points de continuité sont les $x \neq c$.

- Soit $x < c$. Si $x \in I$, alors $0 < F(x) < \alpha$ par stricte croissance, donc $\alpha \in]F(x), 1[$; la question 4.a avec $\varepsilon = \frac{\alpha - F(x)}{2}$ donne $F_{(n, [\alpha n])}(x) \rightarrow 0$. Si $x \notin I$, alors $x \leq a$, donc $F(x) = 0$: presque sûrement aucun X_i n'est $\leq x$, donc $S_n = 0 < [\alpha n]$ presque sûrement et $F_{(n, [\alpha n])}(x) = 0$ pour $n \geq 1/\alpha$.

- Soit $x > c$. Si $x \in I$, $\alpha < F(x) < 1$ et 4.b (avec $\varepsilon = \frac{F(x)-\alpha}{2}$) donne $F_{(n, [\alpha n])}(x) \rightarrow 1$. Si $x \notin I$, alors $x \geq b$, $F(x) = 1$, donc $S_n = n \geq [\alpha n]$ presque sûrement et $F_{(n, [\alpha n])}(x) = 1$.

Ainsi $F_{(n, [\alpha n])}(x)$ tend vers la fonction de répartition de la variable certaine c en tout point $x \neq c$. Par définition de la convergence en loi,

$$X_{(n, [\alpha n])} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} F^{-1}(\alpha).$$

c) Soit $\varepsilon > 0$ et notons $Z_n = X_{(n, [\alpha n])}$. On a

$$\mathbb{P}(|Z_n - c| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n \leq c - \varepsilon) + \mathbb{P}(Z_n \geq c + \varepsilon) \leq F_{(n, [\alpha n])}(c - \varepsilon) + 1 - F_{(n, [\alpha n])}(c + \frac{\varepsilon}{2}),$$

car $[Z_n \geq c + \varepsilon] \subset [Z_n > c + \frac{\varepsilon}{2}]$. D'après b), le premier terme tend vers 0 et $F_{(n, [\alpha n])}(c + \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow 1$. Donc $\mathbb{P}(|Z_n - c| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$:

$$X_{(n, [\alpha n])} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} F^{-1}(\alpha).$$

6. Tri par insertion.

À l'étape k , on mémorise $x = T[k]$, puis on décale d'un cran vers la droite les coefficients de $T[0..k-1]$ strictement supérieurs à x (en partant de la droite) ; on place enfin x dans la case libérée.

```
def tri(T):
    s = len(T)
    for k in range(1, s):
        x = T[k]
        j = k-1
        while j >= 0 and T[j] > x:
            T[j+1] = T[j]
            j = j-1
        T[j+1] = x
```

`tri(T)` trie T en place par ordre croissant.

Le test $j \geq 0$ est évalué en premier : lorsque j vaut -1 , $T[j]$ n'est pas lu.

7. Simulation.

- a) On trie la réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$; la k -ième valeur (indice $k-1$ en Python) est une réalisation de $X_{(n,k)}$.

```
def X(n, k):
    res = ech(n)
    tri(res)
    return res[k-1]
```

`X(n,k)` renvoie une réalisation de $X_{(n,k)}$.

- b) Pour chacune des 20 valeurs α de A (régulièrement réparties entre 0,01 et 0,99), on place le point d'abscisse α et d'ordonnée une réalisation de $X_{(2000, [2000\alpha])}$. D'après la question 5, pour $n = 2000$ grand, cette valeur est proche de $F^{-1}(\alpha)$:

les points approchent le graphe de la fonction quantile $\alpha \mapsto F^{-1}(\alpha)$ sur $]0, 1[$.

- c) Les points sont presque alignés sur la droite passant par $(0, 2)$ et $(1, 6)$: $F^{-1}(\alpha) \simeq 2 + 4\alpha$, donc $F(x) = \frac{x-2}{4}$ pour $x \in [2, 6]$, avec $F = 0$ avant 2 et $F = 1$ après 6. C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[2, 6]$:

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([2, 6]).$$

- d) Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $2 + 4U \hookrightarrow \mathcal{U}([2, 6])$ (transformation affine).

def ech(n):

 return 2 + 4*rd.random(n)

ech(n) renvoie n réalisations indépendantes de $\mathcal{U}([2, 6])$.

Deuxième partie – Cas de la loi exponentielle

Deuxième partie – Moments des statistiques d'ordre et estimation de λ

Les X_i suivent la loi $\mathcal{E}(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$, $f(x) = F(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Questions 8 à 14.

Corrigé – Deuxième partie.

8. Loi de S_k .

a) *Initialisation* ($k = 1$). $S_1 = T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$, de densité $x \mapsto n\lambda e^{-n\lambda x}$ sur $]0, +\infty[$ et nulle ailleurs ; c'est $g_{n,1}$ car $\binom{n-1}{0} = 1$ et $(1 - e^{-\lambda x})^0 = 1$.

Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que S_k ait pour densité $g_{n,k}$. On a $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$, où S_k (fonction de $T_1, \dots, T_k$) et T_{k+1} sont indépendantes (lemme des coalitions), et $T_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu = (n-k)\lambda > 0$. Par le théorème de convolution, S_{k+1} a pour densité

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(t) \mu e^{-\mu(x-t)} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x-t) dt.$$

L'intégrande n'est non nul que si $t > 0$ et $t < x$: $h(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $x > 0$, en posant $C = n \binom{n-1}{k-1}$ et en utilisant $e^{-\lambda(n-k+1)t} e^{\mu t} = e^{-\lambda t}$,

$$\begin{aligned} h(x) &= C \lambda \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} dt = C \lambda \mu e^{-\mu x} \left[\frac{(1 - e^{-\lambda t})^k}{k\lambda} \right]_0^x \\ &= \frac{C\mu}{k} e^{-(n-k)\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^k. \end{aligned}$$

Or $\frac{\mu}{k} \binom{n-1}{k-1} = \lambda \frac{n-k}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \lambda \binom{n-1}{k}$, donc

$$h(x) = n \binom{n-1}{k} \lambda e^{-\lambda(n-(k+1)+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^k = g_{n,k+1}(x).$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_k \text{ a pour densité } g_{n,k}.}$$

b) D'après 3.c, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_{(n,k)}(x) &= n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} (e^{-\lambda x})^{n-k} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} = g_{n,k}(x), \end{aligned}$$

et $f_{(n,k)}(x) = 0 = g_{n,k}(x)$ pour $x \leq 0$ car f y est nulle. Deux variables de même densité ont même loi :

$$\boxed{S_k \text{ et } X_{(n,k)} \text{ ont la même loi.}}$$

9. Espérance et variance.

Pour $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mu}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{1}{\mu^2}$. Par linéarité de l'espérance, puis par indépendance des T_i (variance d'une somme de variables indépendantes), S_k admet une

espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(S_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)\lambda}, \quad \mathbb{V}(S_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2 \lambda^2}.$$

Ces quantités ne dépendent que de la loi ; avec 8.b,

$$\mathbb{E}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}, \quad \mathbb{V}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

10. Asymptotique de l'espérance.

- a) Pour $x \in [j, j+1[: x \geq j > 0$ donne $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \geq 0$. De plus $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} = \frac{x-j}{jx} \leq \frac{1}{jx}$ car $0 \leq x-j < 1$, et $x < j+1 \leq 2j$ donne $\frac{1}{j} < \frac{2}{x}$, donc

$$0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}.$$

- b) Le changement d'indice $j = n - i + 1$ donne $\lambda \mathbb{E}(X_{(n,k)}) = \sum_{j=n-k+1}^n \frac{1}{j}$. Par la relation de Chasles, $\ln \frac{n+1}{n-k+1} = \int_{n-k+1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=n-k+1}^n \int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$, donc

$$\sum_{j=n-k+1}^n \frac{1}{j} - \ln \frac{n+1}{n-k+1} = \sum_{j=n-k+1}^n \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Par a) et croissance de l'intégrale, cette quantité est comprise entre 0 et $\sum_j \int_j^{j+1} \frac{2}{x^2} dx = 2 \int_{n-k+1}^{n+1} \frac{dx}{x^2} = 2 \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right)$. En divisant par $\lambda > 0$:

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) \leq \mathbb{E}(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

- c) Posons $k_n = [\alpha n]$ et $n \geq 1/\alpha$. Comme $\alpha n - 1 < k_n \leq \alpha n$,

$$(1-\alpha)n + 1 \leq n - k_n + 1 < (1-\alpha)n + 2, \quad \text{donc}$$

$$\frac{n+1}{(1-\alpha)n+2} < \frac{n+1}{n-k_n+1} \leq \frac{n+1}{(1-\alpha)n+1}.$$

Les deux bornes tendent vers $\frac{1}{1-\alpha}$; par encadrement puis continuité de $\ln$, $\ln \frac{n+1}{n-k_n+1} \rightarrow -\ln(1-\alpha)$. Par ailleurs $0 \leq \frac{1}{n-k_n+1} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(1-\alpha)n+1} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement appliqué à b) donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{(n, [\alpha n])}) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha).$$

11. Asymptotique de la variance.

Avec $k_n = [\alpha n]$, chacun des k_n termes $\frac{1}{(n-i+1)^2}$ ($1 \leq i \leq k_n$) est majoré par $\frac{1}{(n-k_n+1)^2} \leq \frac{1}{((1-\alpha)n+1)^2}$, et $k_n \leq n$. Ainsi

$$0 \leq \mathbb{V}(X_{(n,k_n)}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{n}{((1-\alpha)n+1)^2} \leq \frac{1}{\lambda^2(1-\alpha)^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_{(n, [\alpha n])}) = 0.$$

12. Convergence en probabilité.

Notons $Z_n = X_{(n, [\alpha n])}$ et $c = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$.

- a) La variable $(Z_n - c)^2$ est positive et admet une espérance (Z_n admet un moment d'ordre 2). Comme $[|Z_n - c| \geq \varepsilon] = [(Z_n - c)^2 \geq \varepsilon^2]$, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(|Z_n - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}((Z_n - c)^2).$$

- b) Par la formule de König-Huygens appliquée à $Z_n - c$, $\mathbb{E}((Z_n - c)^2) = \mathbb{V}(Z_n) + (\mathbb{E}(Z_n) - c)^2$, qui tend vers 0 d'après 10.c et 11. Avec a) et le théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(|Z_n - c| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$:

$$X_{(n, [\alpha n])} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha).$$

13. Lien avec la première partie.

La loi $\mathcal{E}(\lambda)$ vérifie les hypothèses de la question 5 avec $I =]0, +\infty[$: f est continue et strictement positive sur I , nulle en dehors. De plus $F(x) = \alpha \iff 1 - e^{-\lambda x} = \alpha \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$.

$$\text{La question 5.c donne } X_{(n, [\alpha n])} \xrightarrow{\mathbb{P}} F^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha).$$

14. Estimation de λ .

Notons $N_{m,t} = \text{Card}\{i \leq m, X_i > t\} = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{[X_i > t]}$ et $p_t = \mathbb{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}$. Les indicatrices sont mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p_t)$, donc $N_{m,t} \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p_t)$ et $V_{m,t} = \frac{N_{m,t}}{m} + \frac{1}{m}$.

- a) Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité triangulaire, $|V_{m,t} - p_t| \leq |\frac{N_{m,t}}{m} - p_t| + \frac{1}{m}$. Pour $m \geq \frac{2}{\varepsilon}$, on a donc $[|V_{m,t} - p_t| \geq \varepsilon] \subset [|\frac{N_{m,t}}{m} - p_t| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(|V_{m,t} - p_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{4p_t(1 - p_t)}{m\varepsilon^2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

$$V_{m,t} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} e^{-\lambda t}.$$

- b) Notons $\eta = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) > 0$ et supposons $|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq \eta$. Alors

$$e^{-\lambda t}e^{-\varepsilon} \leq V_{m,t} \leq e^{-\lambda t}(2 - e^{-\varepsilon}) \leq e^{-\lambda t}e^{\varepsilon},$$

la dernière inégalité venant de $e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon} - 2 = (e^{\varepsilon/2} - e^{-\varepsilon/2})^2 \geq 0$. En particulier $V_{m,t} > 0$ et, par croissance de $\ln$, $-\lambda t - \varepsilon \leq \ln V_{m,t} \leq -\lambda t + \varepsilon$, c'est-à-dire $|\ln V_{m,t} + \lambda t| \leq \varepsilon$. L'inclusion d'événements obtenue donne

$$\mathbb{P}(|\ln(V_{m,t}) + \lambda t| \leq \varepsilon) \geq \mathbb{P}(|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon})).$$

(Notons que $V_{m,t} \geq \frac{1}{m} > 0$, donc $\ln V_{m,t}$ est toujours défini.) En passant au complémentaire, $\mathbb{P}(|\ln V_{m,t} + \lambda t| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| > \eta)$, qui tend vers 0 d'après a). Comme $\mathbb{P}(|\cdot| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\cdot| > \varepsilon/2)$, on conclut (en appliquant ce qui précède à $\varepsilon/2$) :

$$-\ln(V_{m,t}) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \lambda t.$$

c) En divisant numérateur et dénominateur par m ,

$$W_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{V_{m,t_1}}{V_{m,t_2}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left((-\ln V_{m,t_2}) - (-\ln V_{m,t_1}) \right).$$

W_m est une fonction de $(X_1, \dots, X_m)$ ne dépendant pas de λ : c'est un estimateur de λ . D'après b), $-\ln V_{m,t_2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda t_2$ et $-\ln V_{m,t_1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda t_1$; la convergence en probabilité est stable par combinaison linéaire, donc $W_m \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\lambda t_2 - \lambda t_1}{t_2 - t_1} = \lambda$.

W_m est un estimateur convergent de λ .

Troisième partie – Le théorème de représentation pour $n = 2$

Troisième partie – Discrétisation et indépendance des écarts

On note $\mathcal{L}(q)$ la loi sur $\mathbb{N}$ définie par $\mathbb{P}(Z = k) = pq^k$, avec $p = 1 - q$. Questions 15 à 20.

Corrigé – Troisième partie.

15. Portée du théorème.

La question 8.b n'établit qu'une égalité de lois, *séparément pour chaque k* : $X_{(n,k)}$ a la même loi que S_k . Le théorème affirme davantage : il fournit une *même* famille $(T_{n,1}, \dots, T_{n,n})$ de variables indépendantes telle que l'on ait l'égalité de variables aléatoires $X_{(n,k)} = T_{n,1} + \dots + T_{n,k}$ simultanément pour tous les k .

Les écarts $X_{(n,k)} - X_{(n,k-1)} = T_{n,k}$ sont indépendants, de lois $\mathcal{E}((n - k + 1)\lambda)$: on connaît la loi conjointe de $(X_{(n,1)}, \dots, X_{(n,n)})$, pas seulement chaque loi marginale.

16. La loi $\mathcal{L}(q)$.

Pour $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Z + 1 = k) = pq^{k-1} : Z + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, d'espérance $\frac{1}{p}$ et de variance $\frac{q}{p^2}$. Donc $Z = (Z + 1) - 1$ admet une espérance et une variance. Enfin, par somme d'une série géométrique de raison $q \in]0, 1[$, $\mathbb{P}(Z \geq \ell) = \sum_{k \geq \ell} pq^k = \frac{pq^\ell}{1 - q} = q^\ell$.

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{q}{p}, \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{q}{p^2}, \quad \mathbb{P}(Z \geq \ell) = q^\ell.$$

17. Minimum de variables de loi $\mathcal{L}(q)$.

a) $[U_n \geq \ell] = \bigcap_{i=1}^n [Z_i \geq \ell]$ et, par indépendance mutuelle,

$$\mathbb{P}(U_n \geq \ell) = (q^\ell)^n = (q^n)^\ell.$$

b) U_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $[U_n \geq \ell] = [U_n = \ell] \sqcup [U_n \geq \ell + 1]$, donc $\mathbb{P}(U_n = \ell) = (q^n)^\ell - (q^n)^{\ell+1} = (1 - q^n)(q^n)^\ell$. Comme $q^n \in]0, 1[$,

$$U_n \hookrightarrow \mathcal{L}(r) \quad \text{avec} \quad r = q^n.$$

18. Une probabilité conjointe.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = j])_{j \in \mathbb{N}}$. Les événements $[Z_1 = j] \cap [Z_1 \geq k_1]$ sont vides pour $j < k_1$, et $[Z_1 = j] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2] = [Z_1 = j] \cap [Z_2 \geq j + k_2]$. Par indépendance de Z_1 et Z_2 et 16 :

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \sum_{j=k_1}^{+\infty} pq^j q^{j+k_2} = pq^{k_2} \sum_{j=k_1}^{+\infty} (q^2)^j = pq^{k_2} \frac{q^{2k_1}}{1 - q^2}.$$

Comme $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$,

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \frac{1}{1 + q} q^{2k_1} q^{k_2}.$$

19. Discrétisation de variables exponentielles.

a) Presque sûrement $X_1 > 0$, donc $Z_1 = [mX_1] \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = \mathbb{P}\left(\frac{k}{m} \leq X_1 < \frac{k+1}{m}\right) = e^{-\lambda k/m} - e^{-\lambda(k+1)/m} = (1 - e^{-\lambda/m})(e^{-\lambda/m})^k.$$

Il en va de même pour Z_2 :

$$Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{L}(q) \quad \text{avec} \quad q = e^{-\lambda/m} \in]0, 1[.$$

b) On utilise $Z_i \leq mX_i < Z_i + 1$ et $k_1 \leq mx < k_1 + 1$, $k_2 \leq my < k_2 + 1$.

- Si $Z_1 \geq k_1 + 1$: $mX_1 \geq Z_1 \geq k_1 + 1 > mx$, donc $X_1 > x$.
- Si $X_1 > x$: $mX_1 > mx \geq k_1$; la partie entière étant croissante, $Z_1 = [mX_1] \geq [k_1] = k_1$.
- Si $Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2$: $mX_2 - mX_1 > Z_2 - (Z_1 + 1) \geq k_2 + 1 > my$, donc $X_2 - X_1 > y$.
- Si $X_2 - X_1 > y$: $Z_2 - Z_1 > (mX_2 - 1) - mX_1 > my - 1 \geq k_2 - 1$; l'entier $Z_2 - Z_1$ est donc $\geq k_2$.

$$\begin{aligned} [Z_1 \geq k_1 + 1] &\subset [X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1], \\ [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] &\subset [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq k_2]. \end{aligned}$$

c) Par intersection des inclusions de b),

$$\begin{aligned} [Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] &\subset [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y] \\ &\subset [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]. \end{aligned}$$

Les variables Z_1 et Z_2 , fonctions de X_1 et X_2 indépendantes, sont indépendantes et de loi $\mathcal{L}(q)$ avec $q = e^{-\lambda/m}$. La question 18 (avec $(k_1 + 1, k_2 + 2)$ puis (k_1, k_2)) et la croissance de $\mathbb{P}$ donnent

$$\frac{e^{-2\lambda \frac{[mx]+1}{m}} e^{-\lambda \frac{[my]+2}{m}}}{1 + e^{-\lambda/m}} \leq \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{e^{-2\lambda \frac{[mx]}{m}} e^{-\lambda \frac{[my]}{m}}}{1 + e^{-\lambda/m}}.$$

d) Comme $mx - 1 < [mx] \leq mx$, on a $x - \frac{1}{m} < \frac{[mx]}{m} \leq x$, donc $\frac{[mx]}{m} \rightarrow x$ et $\frac{[mx]+1}{m} \rightarrow x$ quand $m \rightarrow +\infty$; de même $\frac{[my]}{m} \rightarrow y$ et $\frac{[my]+2}{m} \rightarrow y$. Enfin $\frac{1}{1+e^{-\lambda/m}} \rightarrow \frac{1}{2}$. Par continuité de l'exponentielle, les deux bornes de c) tendent vers $\frac{1}{2}e^{-2\lambda x}e^{-\lambda y}$; le terme central ne dépend pas de m , et le théorème d'encadrement donne

$$\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2}e^{-2\lambda x}e^{-\lambda y}.$$

20. Indépendance de $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$.

La question 19 s'applique aussi au couple (X_2, X_1) (indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$) : $\mathbb{P}([X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]) = \frac{1}{2}e^{-2\lambda x}e^{-\lambda y}$ pour $x, y \geq 0$.

a) Avec $x = y = 0$: $\mathbb{P}([X_1 > 0] \cap [X_2 > X_1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_2 > 0] \cap [X_1 > X_2]) = \frac{1}{2}$. Comme $\mathbb{P}(X_1 > 0) = \mathbb{P}(X_2 > 0) = 1$, on obtient $\mathbb{P}(X_2 > X_1) = \mathbb{P}(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$. Les événements $[X_1 < X_2]$, $[X_1 > X_2]$, $[X_1 = X_2]$ forment un système complet, donc

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0.$$

Ensuite $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq 0) \leq \mathbb{P}(X_1 \leq 0) + \mathbb{P}(X_2 \leq 0) = 0$, et $X_{(2)} - X_{(1)} = |X_2 - X_1|$ est nul seulement sur $[X_1 = X_2]$, négligeable. Ainsi $X_{(1)} > 0$ et $X_{(2)} - X_{(1)} > 0$ presque sûrement.

- b)** Notons $E = [X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]$ avec $x, y \geq 0$. Sur $[X_1 = X_2]$, $X_{(2)} - X_{(1)} = 0 \leq y$, donc $E \cap [X_1 = X_2] = \emptyset$. Sur $[X_1 < X_2]$, $X_{(1)} = X_1$ et $X_{(2)} = X_2$; comme $y \geq 0$, la condition $X_2 - X_1 > y$ entraîne $X_1 < X_2$, donc

$$E \cap [X_1 < X_2] = [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y], \quad \text{et}$$

$$E \cap [X_1 > X_2] = [X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y].$$

Par additivité, puis 19.d appliquée aux couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) , ces deux probabilités sont égales :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y} .}$$

- c)** *Lois.* Avec $y = 0$ et $T_2 > 0$ presque sûrement : $\mathbb{P}(T_1 > x) = e^{-2\lambda x}$ pour $x \geq 0$; et $\mathbb{P}(T_1 > x) = 1$ pour $x < 0$ car $T_1 > 0$ presque sûrement. La fonction de répartition de T_1 est donc $x \mapsto 1 - e^{-2\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$: $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$. De même, avec $x = 0$, $\mathbb{P}(T_2 > y) = e^{-\lambda y}$ pour $y \geq 0$: $T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Indépendance. Pour $x, y \geq 0$, notons $A = [T_1 > x]$, $B = [T_2 > y]$; b) donne $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Alors

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)),$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq y]) = \mathbb{P}(T_1 \leq x)\mathbb{P}(T_2 \leq y)$. Si $x < 0$ ou $y < 0$, les deux membres sont nuls. La fonction de répartition du couple est le produit des fonctions de répartition : T_1 et T_2 sont indépendantes.

$$\boxed{T_1 = X_{(1)} \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda), \quad T_2 = X_{(2)} - X_{(1)} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \quad T_1, T_2 \text{ indépendantes.}}$$

Conclusion. Avec $T_{2,1} = T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}((2 - 1 + 1)\lambda)$ et $T_{2,2} = T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}((2 - 2 + 1)\lambda)$, indépendantes, on a $X_{(2,1)} = T_{2,1}$ et $X_{(2,2)} = T_{2,1} + T_{2,2}$: le théorème de la question 15 est démontré pour $n = 2$.