Ecricome

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2025

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Calcul de sommes de séries

Exercice 1 – Séries absolument convergentes et intégrales oscillantes

On note $A = \sum_{n\geq 1} 1/n^2$, $B = \sum_{n\geq 1}(-1)^n/n^2$ et $C = \sum_{n\geq 0} 1/(2n+1)^2$, après avoir justifié leur convergence.

Corrigé – Exercice 1.

1. Convergence des trois séries.

a) La série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc converge.

$$\boxed{A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ est bien défini.}}$$

b) On a $|(-1)^n/n^2| = 1/n^2$; la série est absolument convergente, donc convergente.

$$\boxed{B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ est bien défini.}}$$

c) Pour $n \geq 1$, $0 < 1/(2n+1)^2 \leq 1/n^2$. La comparaison avec a) assure la convergence, le terme d'indice 0 ne modifiant pas la nature de la série.

$$\boxed{C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ est bien défini.}}$$

2. Relations entre les sommes.

Les séries étant absolument convergentes, on peut séparer les indices pairs et impairs. Dans $A - B$, les indices pairs donnent zéro et les impairs donnent deux fois leur contribution. Dans A, la somme sur les pairs vaut $\sum_{n\geq 1} 1/(2n)^2 = A/4$.

$$\boxed{A - B = 2C, \qquad A = C + \frac{1}{4}A.}$$

3. Une somme trigonométrique finie.

a) Les formules d'addition donnent $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. En les additionnant,

$$\boxed{2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).}$$

b) Pour $t \in [0, \pi[$, $\cos(t/2) > 0$. Au rang $n = 1$, a) avec $\alpha = t$ et $\beta = t/2$ donne $2\cos t\cos(t/2) = \cos(3t/2) + \cos(t/2)$; après division, la formule annoncée vaut pour $-\cos t$. Supposons-la vraie à l'indice n. En ajoutant $(-1)^{n+1}\cos((n+1)t)$, le numérateur qui reste après le terme $-1/2$ est

$$(-1)^n\left(\cos((n+1/2)t) - 2\cos(t/2)\cos((n+1)t)\right).$$

La question a) transforme la parenthèse en $-\cos((n+3/2)t)$. C'est la formule à l'indice $n+1$. Par récurrence,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n\cos((2n+1)t/2)}{2\cos(t/2)}.}$$

4. Limite d'une intégrale oscillante.

a) Comme f et f' sont continues sur le segment fermé et borné $[a,b]$, le théorème des bornes atteintes assure que leurs valeurs absolues sont bornées. On peut choisir un majorant commun $M \geq 0$:

$$\boxed{\exists M \geq 0, \quad \forall t \in [a,b], \quad |f(t)| \leq M \text{ et } |f'(t)| \leq M.}$$

b) Pour $\lambda > 0$,

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M(b-a)}{\lambda} \longrightarrow 0.$$

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

c) Sur le segment $[a,b]$, on intègre par parties avec $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$, $v(t) = \sin(\lambda t)/\lambda$, $v'(t) = \cos(\lambda t)$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$$

Le terme de bord a une valeur absolue au plus $2M/\lambda$ et tend vers 0 ; b) traite le second terme.

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

5. Régularité de φ et prolongement de f.

a) Pour $0 < t \leq \pi$, $\sin(t/2) > 0$, donc φ est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de dénominateur non nul.

$$\boxed{\varphi'(t) = \frac{\sin(t/2) - (t/2)\cos(t/2)}{\sin(t/2)^2}.}$$

b) La dérivabilité du sinus en 0 entraîne

$$\frac{\sin(t/2)}{t/2} \longrightarrow 1, \qquad \varphi(t) = \frac{2}{\sin(t/2)/(t/2)} \longrightarrow 2.$$

$$\boxed{\varphi(0) = 2 \text{ donne un prolongement continu sur } [0,\pi].}$$

c) Posons $u = t/2$. Pour $u \geq 0$, les identités intégrales et $|\sin v| \leq |v|$ donnent

$$0 \leq u - \sin u = \int_0^u (1 - \cos v)\,\mathrm{d}v \leq \int_0^u \frac{v^2}{2}\,\mathrm{d}v = \frac{u^3}{6}.$$

On a utilisé $1 - \cos v = 2\sin^2(v/2) \leq v^2/2$. Pour $t > 0$ assez petit, il vient

$$0 \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{u - \sin u}{u \sin u} \leq \frac{u^2}{6 \sin u} \longrightarrow 0.$$

Le prolongement est donc dérivable à droite en 0, de dérivée 0. D'autre part, la dérivée de $u \mapsto \sin u - u\cos u$ est $u \sin u$. Pour $0 \leq u \leq \pi/2$,

$$0 \leq \sin u - u\cos u = \int_0^u v \sin v\,\mathrm{d}v \leq \frac{u^3}{3}.$$

Avec a), $0 \leq \varphi'(t) \leq u^3/(3\sin^2 u) \to 0$. La dérivée du prolongement est donc continue en 0.

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi]), \qquad \varphi'(0) = 0.}$$

d) L'identité admise $f(t) = \varphi(\pi - t)$ donne le prolongement en posant $f(\pi) = \varphi(0) = 2$. Il s'agit de la composée avec une fonction affine d'une seule variable, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment.

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1([0,\pi]), \qquad f(\pi) = 2, \qquad f'(t) = -\varphi'(\pi - t).}$$

6. Intégration des sommes finies.

a) Sur $[0,\pi]$, prendre $u(t) = \pi - t$, $u'(t) = -1$, $v(t) = \sin(kt)/k$, $v'(t) = \cos(kt)$; toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégration par parties donne

$$\int_0^\pi (\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\pi - t)\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2}.$$

$$\boxed{\int_0^\pi (\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \text{ pair}, \\ 2/k^2, & k \text{ impair}. \end{cases}}$$

b) La linéarité de l'intégrale s'applique à la somme *finie*. Les indices pairs donnent 0, et, pour $k = 2n+1$, le signe $(-1)^k$ vaut -1. Ainsi

$$\boxed{\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = -2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}.}$$

7. Valeurs des trois sommes.

a) On applique 3.b) avec $n = 2N + 1$, puis on multiplie par $\pi - t$. Avec la fonction f prolongée en 5.d), on intègre sur $[0, \pi]$:

$$-2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right)\,\mathrm{d}t.$$

L'identité est valable avant π ; son prolongement continu donne la même intégrale au point terminal. La première intégrale vaut $\pi^2/2$. La seconde tend vers 0 par 4.c), puisque $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$ et $(4N + 3)/2 \to +\infty$. La limite donne $-2C = -\pi^2/4$, donc

$$\boxed{C = \frac{\pi^2}{8}.}$$

b) Par 2, $3A/4 = C$, puis $B = A - 2C$.

$$\boxed{A = \frac{\pi^2}{6}, \qquad B = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Exercice 2 – Une décomposition matricielle

Exercice 2 – Polynôme annulateur et décomposition orthogonale

On considère la matrice M donnée dans l'énoncé et $S = {}^tMM$. Le polynôme $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 - 12x - 28$ annule M, résultat admis.

Corrigé – Exercice 2.

Partie 1 – Un polynôme annulateur de M

1. Existence d'un polynôme annulateur.

a) L'espace $M_3(\mathbb{R})$ a dimension 9. La famille $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$ contient 10 matrices ; elle est donc liée.

$$\boxed{(I_3, M, \dots, M^9) \text{ est une famille liée.}}$$

b) Il existe ainsi des réels $a_0, \dots, a_9$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{9} a_k M^k = 0$. Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{9} a_k x^k$ est non nul et vérifie $P(M) = 0$.

$$\boxed{M \text{ possède un polynôme annulateur non nul de degré au plus 9.}}$$

2. Vérification informatique et inverse de M.

a) Le programme calcule $\varphi(M)$, puis compare chaque coefficient à 0 par une boucle. Les produits de matrices sont des produits matriciels.

```
def PolyAnn(M):
    M2 = np.dot(M, M)
    M3 = np.dot(M2, M)
    A = M3 - 4 * M2 - 12 * M - 28 * np.eye(3)
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            if A[i, j] != 0:
                return False
    return True
```

Ce test porte sur l'égalité exacte des coefficients calculés.

$$\boxed{\texttt{PolyAnn(M)} \text{ teste si } M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0.}$$

b) Le polynôme annulateur admis donne $M(M^2 - 4M - 12I_3) = 28I_3$. Les facteurs étant des polynômes en M, ils commutent ; le même produit vaut $28I_3$ dans l'autre ordre. Ainsi

$$\boxed{M \text{ est inversible}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3).}$$

3. Valeurs propres de M et diagonalisation.

a) Si $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, une récurrence donne $M^k X = \lambda^k X$. Par conséquent $0 = \varphi(M)X = \varphi(\lambda)X$, donc

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \implies \varphi(\lambda) = 0.}$$

b) On a $\varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$. Ses deux racines sont $a = (4 - 2\sqrt{13})/3 < 0$ et $b = (4 + 2\sqrt{13})/3 > 0$. La fonction φ croît sur $]-\infty, a]$, décroît sur $[a, b]$, puis croît sur $[b, +\infty[$. Pour vérifier le signe du maximum local, on observe directement que, pour $x \leq 0$,

$$\varphi(x) = x^3 - 4(x + 3/2)^2 - 19 < 0.$$

Ainsi $\varphi(a) < 0$, et $\varphi(b) \leq \varphi(a) < 0$. Avec les limites $\varphi(x) \to \pm\infty$ en $\pm\infty$, le tableau de variations montre qu'il existe une unique racine réelle λ_0, située après b. Comme $b < 4$ et $\varphi(4) = -76 < 0$, on a $\lambda_0 > 4$. Par a), toute valeur propre réelle éventuelle doit être λ_0. On peut en outre vérifier son existence sans autre théorème : le vecteur non nul

$$v = \begin{pmatrix} 3(\lambda_0 - 2) \\ \lambda_0^2 - 2\lambda_0 - 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

satisfait, par calcul direct, $(M - \lambda_0 I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi(\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

$$\boxed{M \text{ possède une unique valeur propre réelle } \lambda_0 > 4.}$$

c) Si M était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sa matrice diagonale semblable aurait pour seule valeur diagonale λ_0 ; elle serait $\lambda_0 I_3$. On aurait alors $M = \lambda_0 I_3$, ce qui contredit les coefficients hors diagonale non nuls de M.

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

Partie 2 – Construction de $M = UR$

4. Symétrie de S.

La transposition d'un produit donne

$$\boxed{{}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = S.}$$

5. Positivité stricte des valeurs propres de S.

Si $SX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors

$$\lambda \|X\|^2 = {}^tXSX = {}^tX{}^tMMX = \|MX\|^2.$$

Comme M est inversible, $MX \neq 0$, donc le membre de droite est strictement positif. Ainsi

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(S), \quad \lambda > 0.}$$

6. Diagonalisation orthogonale.

Le théorème spectral s'applique à la matrice symétrique réelle S. Il fournit une matrice orthogonale P et une diagonale D telles que $S = PD{}^tP$. On utilise la valeur admise de D :

$$\boxed{S = PD{}^tP, \qquad {}^tPP = P{}^tP = I_3, \qquad D = \mathrm{diag}(1, 16, 49).}$$

7. Racines diagonales de D.

a) Une matrice diagonale Δ vérifie $\Delta^2 = D$ si et seulement si ses coefficients diagonaux valent respectivement ± 1, ± 4, ± 7. Les signes peuvent être choisis indépendamment.

$$\boxed{2^3 = 8 \text{ matrices diagonales } \Delta \text{ vérifient } \Delta^2 = D.}$$

b) Aucun de ces coefficients n'est nul ; la diagonale est donc inversible.

$$\boxed{\Delta^{-1} = \mathrm{diag}(1/\delta_1, 1/\delta_2, 1/\delta_3), \qquad \Delta \text{ inversible.}}$$

8. Une racine carrée symétrique de S.

Posons $R = P\Delta^t P$. Comme Δ est diagonale réelle, Δ est symétrique et ${}^tR = P^t\Delta^t P = R$. L'orthogonalité de P donne $R^2 = P\Delta^t PP\Delta^t P = P\Delta^{2t}P = S$.

$$\boxed{R = P\Delta^t P \text{ est symétrique réelle}, \qquad R^2 = S.}$$

9. Inverse de R.

Le produit $P\Delta^t P$ est inversible, puisque chacun de ses facteurs l'est. Par multiplication directe,

$$\boxed{R^{-1} = P\Delta^{-1t}P.}$$

Cette matrice est également symétrique.

10. Orthogonalité de U.

Avec $U = MR^{-1}$ et la symétrie de R^{-1},

$${}^tUU = R^{-1t}MMR^{-1} = R^{-1}SR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = I_3.$$

C'est la caractérisation d'une matrice orthogonale.

$$\boxed{U \text{ est orthogonale}, \qquad M = UR.}$$

Partie 3 – Unicité avec une racine à valeurs propres positives

11. Valeurs propres de R.

On choisit maintenant la diagonale positive $\Delta = \mathrm{diag}(1, 4, 7)$. La similitude $R = P\Delta P^{-1}$ montre que les valeurs propres sont les coefficients de cette diagonale :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(R) = \{1, 4, 7\} \subset]0, +\infty[.}$$

12. Relations vérifiées par T et N.

Puisque $M = VT$, V est orthogonale et T est symétrique,

$$S = {}^tMM = {}^tT{}^tVVT = T^2.$$

Avec $N = {}^tPTP$, $N^2 = {}^tPTP^tPTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D$.

$$\boxed{T^2 = S, \qquad N^2 = D.}$$

13. Commutation de T et S.

La relation $S = T^2$ donne $TS = T^3 = ST$.

$$\boxed{TS = ST.}$$

14. Action de T sur les colonnes de P.

a) Le produit par le vecteur canonique E_i sélectionne la i-ième colonne de la matrice :

$$\boxed{PE_i = C_i.}$$

b) D'après $SP = PD$, on a $SC_i = SPE_i = PDE_i = \lambda_i PE_i = \lambda_i C_i$, où $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = 49$. Les colonnes d'une matrice orthogonale sont de norme 1, donc non nulles.

$$\boxed{SC_i = \lambda_i C_i, \qquad \lambda_i \in \{1, 16, 49\}.}$$

c) En utilisant 13, $S(TC_i) = T(SC_i) = \lambda_i TC_i$.

$$\boxed{TC_i \in \ker(S - \lambda_i I_3).}$$

d) Les trois valeurs propres de S sont distinctes ; dans la base (C_1, C_2, C_3), S a pour matrice D. Pour chaque i, l'équation $DZ = \lambda_i Z$ impose que les autres coordonnées soient nulles. Son espace propre est donc la droite engendrée par C_i.

$$\boxed{\exists \nu_i \in \mathbb{R}, \qquad TC_i = \nu_i C_i.}$$

15. La matrice N est diagonale.

Les relations 14.d) donnent $TP = P\,\mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. En multipliant à gauche par ${}^tP$,

$$\boxed{N = {}^tPTP = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3).}$$

16. Identification de N et de T.

Chaque ν_i est une valeur propre de T, car $C_i \neq 0$. Par hypothèse, $\nu_i > 0$. Comme $N^2 = D$, $\nu_i^2 = \lambda_i$, donc $\nu_i = \sqrt{\lambda_i} = \delta_i$. Il vient

$$\boxed{N = \Delta, \qquad T = PN{}^tP = P\Delta{}^tP = R.}$$

17. Identification des matrices orthogonales.

Les relations $M = VT$ et $T = R$, avec R inversible, donnent $V = MR^{-1} = U$.

$$\boxed{V = U.}$$

La décomposition construite avec R symétrique à valeurs propres strictement positives est donc unique.

Problème – Intégrales bêta et gamma et simulations

Problème – Intégrales impropres, convolution et estimations

Pour $x, y > 0$, on pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$. La fonction Gamma est définie pour $a > 0$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Une équivalence d'intégrandes positifs signifie que leur quotient tend vers 1 au point considéré.

Corrigé – Problème.

Partie 1 – L'intégrale bêta

1. Domaine de convergence.

a) Pour tous réels x, y, $(1-t)^{y-1} \to 1$ en 0^+.

$$\boxed{t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1} \qquad (t \to 0^+).}$$

b) L'intégrale de t^{x-1} au voisinage de 0 converge si et seulement si $x - 1 > -1$, soit $x > 0$. Les intégrandes sont positifs, donc la comparaison par équivalence donne

$$\boxed{\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff x > 0.}$$

c) La substitution $s = 1 - t$ est une bijection affine $\mathcal{C}^1$, de dérivée -1, entre $[1/2, 1[$ et $]0, 1/2]$. Elle conserve la nature des intégrales impropres et donne

$$\boxed{\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,\mathrm{d}s \text{ lorsque ces intégrales convergent.}}$$

d) L'intégrande est continu sur tout segment contenu dans $]0,1[$. Il suffit donc de traiter séparément les deux extrémités. La question b) traite 0, et c) ramène l'étude en 1 à la même comparaison avec le paramètre y.

$$\boxed{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff x > 0 \text{ et } y > 0.}$$

2. Symétrie de B.

Pour $x, y > 0$, le changement affine $s = 1-t$, effectué d'abord sur des segments intérieurs à $]0,1[$ puis aux limites, donne

$$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,\mathrm{d}s = B(y,x).}$$

Les convergences aux deux extrémités sont assurées par la question 1.

3. Valeur de $B(x,1)$.

Pour $x > 0$, une primitive de t^{x-1} est t^x/x et $t^x \to 0$ en 0^+.

$$\boxed{B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.}$$

4. Relations de récurrence pour B.

a) Les intégrales convergent et

$$t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y = t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t+1-t).$$

En intégrant,

$$\boxed{B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y).}$$

b) Pour $0 < \eta < 1/2$, on intègre par parties sur le segment $[\eta, 1-\eta]$ avec $u(t) = t^x$, $u'(t) = xt^{x-1}$, $v(t) = (1-t)^y$, $v'(t) = -y(1-t)^{y-1}$. Les fonctions u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment. La formule donne

$$x\int_\eta^{1-\eta} t^{x-1}(1-t)^y \,\mathrm{d}t = [t^x(1-t)^y]_\eta^{1-\eta} + y\int_\eta^{1-\eta} t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x, y > 0$, les deux termes de bord tendent vers 0 lorsque $\eta \to 0^+$. Les deux intégrales convergent d'après 1, donc

$$\boxed{xB(x,y+1) = yB(x+1,y).}$$

c) Posons $A_1 = B(x+1,y)$ et $A_2 = B(x,y+1)$. Les deux équations précédentes donnent $A_1 + A_2 = B(x,y)$ et $xA_2 = yA_1$. Comme $x + y > 0$, on obtient

$$\boxed{B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).}$$

5. Valeurs aux paramètres entiers.

Pour $p, q \geq 1$, la symétrie et 3 donnent $B(1,q) = 1/q$. En appliquant 4.c) successivement au premier paramètre,

$$B(p,q) = B(1,q)\prod_{j=1}^{p-1}\frac{j}{j+q} = \frac{1}{q}\frac{(p-1)!\,q!}{(p+q-1)!}.$$

Pour $p = 1$, le produit est vide et vaut 1, ce qui donne la même formule.

$$\boxed{B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.}$$

Partie 2 – Gamma et lois à densité

6. Valeurs de la fonction Gamma.

a) On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. La récurrence admise $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ donne, par induction,

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}).}$$

b) Dans l'intégrale simple définissant $\Gamma(1/2)$, poser $u = \sqrt{2t}$, soit $t = u^2/2$. Sur $]0, +\infty[$, cette application est une bijection $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive ; son inverse l'est aussi. Le changement de variable est réalisé sur les segments $[\eta, R]$ puis aux limites ; il conserve la nature de l'intégrale impropre. Comme $\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}u$, il donne

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

La densité normale centrée réduite $\mathrm{e}^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$ est paire et s'intègre à 1 ; son intégrale sur $[0,+\infty[$ vaut donc $1/2$.

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.}$$

7. La fonction $f_{a,b}$ est une densité.

a) Sur $]0,+\infty[$, le changement affine $s = bt$, de dérivée $b > 0$, est une bijection $\mathcal{C}^1$ de cet intervalle sur lui-même. Il conserve la nature de l'intégrale impropre et donne

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = b^{-a}\int_0^{+\infty} s^{a-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = b^{-a}\Gamma(a) < +\infty.$$

L'intégrale sur $]-\infty,0]$ est nulle.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b) La fonction est positive ou nulle ; elle est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, avec un seul point exceptionnel possible en 0. Le calcul précédent donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b^a}{\Gamma(a)}b^{-a}\Gamma(a) = 1.$$

$$\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

La famille à deux paramètres est entièrement définie ici par cette densité ; ses propriétés seront établies dans les questions suivantes.

8. Deux cas connus de la famille.

a) Pour $b = 1$, on retrouve la densité $t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}/\Gamma(a)$ sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire la loi gamma à un paramètre de forme a, notée $\gamma(a)$. Ses moments usuels donnent

$$\boxed{X \sim \gamma(a), \qquad \mathbb{E}(X) = a, \qquad \mathbb{V}(X) = a.}$$

b) Pour $a = 1$, $\Gamma(1) = 1$ et la densité vaut $b\mathrm{e}^{-bt}$ pour $t > 0$: c'est une loi exponentielle de paramètre b. Elle possède un second moment $2/b^2$ et une espérance $1/b$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{E}(b), \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{b}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{b^2}.}$$

9. Changement d'échelle et moments.

a) Puisque $b > 0$, la transformation affine d'une densité donne, pour $s > 0$,

$$f_{bX}(s) = \frac{1}{b}f_{a,b}(s/b) = \frac{s^{a-1}\mathrm{e}^{-s}}{\Gamma(a)},$$

et cette densité est nulle pour $s \leq 0$.

$$\boxed{bX \sim \gamma(a).}$$

b) La variable bX possède une espérance et une variance égales à a. La transformation inverse $X = (bX)/b$ donne

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a}{b}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a}{b^2}.}$$

10. Somme de deux variables et identité bêta–gamma.

a) Le théorème de convolution, applicable aux deux variables à densité indépendantes, donne une densité de $X_1 + X_2$:

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(s-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $s \leq 0$, les supports positifs ne se rencontrent pas, donc on peut choisir $h(s) = 0$. Pour $s > 0$, seul l'intervalle $]0, s[$ contribue et

$$h(s) = \frac{b^{a_1+a_2}\mathrm{e}^{-bs}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^s t^{a_1-1}(s-t)^{a_2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $s > 0$ fixé, le changement $t = su$ est une bijection affine $\mathcal{C}^1$, de dérivée $s > 0$, de $]0, 1[$ sur $]0, s[$. Il conserve la nature des intégrales impropres. Dans cette seule intégrale simple, il donne

$$\int_0^s t^{a_1-1}(s-t)^{a_2-1}\,\mathrm{d}t = s^{a_1+a_2-1} \int_0^1 u^{a_1-1}(1-u)^{a_2-1}\,\mathrm{d}u.$$

L'intégrale converge d'après la partie 1.

$$\boxed{h(s) = \begin{cases} \dfrac{b^{a_1+a_2}B(a_1,a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} s^{a_1+a_2-1}\mathrm{e}^{-bs}, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0. \end{cases}}$$

b) La fonction h est une densité, donc son intégrale vaut 1. La question 7.a) avec $a = a_1 + a_2$ permet de calculer cette intégrale :

$$1 = \frac{b^{a_1+a_2}B(a_1,a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{b^{a_1+a_2}}.$$

Comme les deux paramètres peuvent être tous réels strictement positifs,

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x, y > 0).}$$

Cette déduction utilise seulement la normalisation de la densité obtenue, sans échange de l'ordre de deux intégrales.

c) Avec 6, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

$$\boxed{B(1/2, 1/2) = \pi.}$$

Corrigé – Problème – Partie 3.

Partie 3 – Estimations par simulation

11. Simulation de l'intégrale $B(x,y)$.

a) Posons $H = U^{x-1}(1-U)^{y-1}$, où U est uniforme sur $]0,1[$. La variable est positive, et la formule de transfert donne

$$\mathbb{E}(H) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,\mathrm{d}u = B(x,y) < +\infty.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x,y) \qquad (x,y>0).}$$

Correction de l'affirmation admise dans l'énoncé. L'existence d'une variance pour tous $x,y>0$ est fausse. En effet, le second moment est donné, lorsqu'il est fini, par

$$\mathbb{E}(H^2) = \int_0^1 u^{2x-2}(1-u)^{2y-2}\,\mathrm{d}u.$$

La question 1 montre que cette intégrale converge si et seulement si $2x-1>0$ et $2y-1>0$.

$$\boxed{H \text{ possède une variance finie } \iff x > \frac{1}{2} \text{ et } y > \frac{1}{2}.}$$

Dans ce cas, $\mathbb{V}(H) = B(2x-1,2y-1) - B(x,y)^2$. En particulier, pour $x=y=1/2$, le second moment est infini. La convergence demandée en c) reste vraie pour tous $x,y>0$; on la prouve ci-dessous sans cette admission incorrecte.

b) On simule l'uniforme dans $]0,1[$, en retirant si le générateur renvoie 0, afin que les éventuelles puissances négatives soient définies.

```
def Simul(x, y):
    U = rd.random()
    while U == 0:
        U = rd.random()
    return U ** (x - 1) * (1 - U) ** (y - 1)
```

$$\boxed{\texttt{Simul(x,y)} \text{ simule } U^{x-1}(1-U)^{y-1}.}$$

c) Si $x,y>1/2$, la loi faible des grands nombres du cours est applicable aux variables indépendantes de même loi et de variance finie, et donne déjà le résultat. Pour traiter *tous* $x,y>0$, nous donnons une preuve par troncature. Posons $h(u) = u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ sur $]0,1[$ et $\beta = B(x,y)$. Pour $0<\delta<1/2$, posons

$$Y_k = h(U_k)\mathbf{1}_{[\delta,1-\delta]}(U_k), \qquad Z_k = h(U_k) - Y_k \geq 0.$$

La fonction h est continue sur le segment $[\delta,1-\delta]$, donc bornée par un réel $C_\delta>0$. Ainsi $0 \leq Y_k \leq C_\delta$ et $\mathbb{V}(Y_k) \leq C_\delta^2$. Les variables Y_k sont indépendantes et de même loi. La contribution retirée a pour espérance

$$\eta_\delta = \mathbb{E}(Z_k) = \int_0^\delta h(u)\,\mathrm{d}u + \int_{1-\delta}^1 h(u)\,\mathrm{d}u \longrightarrow 0 \quad (\delta \to 0^+),$$

car ce sont des restes de l'intégrale bêta convergente. On a $\mu_\delta = \mathbb{E}(Y_k) = \beta - \eta_\delta$. Notons $\overline{Y}_n = n^{-1}\sum_k Y_k$ et $\overline{Z}_n = n^{-1}\sum_k Z_k$; alors $R_n = \overline{Y}_n + \overline{Z}_n$. Pour $t>0$ et $\eta_\delta < t/4$,

$$|R_n - \beta| \leq |\overline{Y}_n - \mu_\delta| + \overline{Z}_n + \eta_\delta.$$

Donc l'événement $[|R_n - \beta| > t]$ est contenu dans la réunion de $[|\overline{Y}_n - \mu_\delta| > t/2]$ et $[\overline{Z}_n > t/4]$. L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne pour le premier

$$\mathbb{P}(|\overline{Y}_n - \mu_\delta| > t/2) \leq \frac{4\mathbb{V}(Y_1)}{nt^2} \leq \frac{4C_\delta^2}{nt^2}.$$

Pour le second, l'inégalité positive $\mathbf{1}_{[\overline{Z}_n > t/4]} \leq 4\overline{Z}_n/t$ donne $\mathbb{P}(\overline{Z}_n > t/4) \leq 4\eta_\delta/t$. Ainsi

$$\mathbb{P}(|R_n - \beta| > t) \leq \frac{4C_\delta^2}{nt^2} + \frac{4\eta_\delta}{t}.$$

Fixons maintenant $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons d'abord δ assez petit pour avoir $\eta_\delta \leq t\min(1/8, \varepsilon/8)$. Ce choix fixe C_δ ; choisissons ensuite un entier $N \geq 8C_\delta^2/(t^2\varepsilon)$. Pour $n \geq N$, les deux termes de la majoration sont au plus $\varepsilon/2$ chacun. Cela prouve

$$\boxed{\forall x, y > 0, \qquad R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} B(x,y).}$$

d) On additionne n tirages indépendants de la fonction b) puis on divise par n, supposé strictement positif.

```
def Rn(x, y, n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + Simul(x, y)
    return s / n
```

$$\boxed{\texttt{Rn(x,y,n)} \text{ simule une réalisation de } R_n.}$$

e) La figure avec $x = y = 1/2$ montre des moyennes proches de $B(1/2, 1/2) = \pi$ lorsque la taille de l'échantillon augmente. Elle illustre donc la valeur calculée en 10.c), accompagnée de la convergence en probabilité démontrée en c).

$$\boxed{x = y = \frac{1}{2} : \qquad R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \pi.}$$

C'est précisément un cas où la variance des termes n'existe pas, mais où la preuve par troncature demeure valable.

12. Simulation de la fonction Gamma.

a) Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $a \geq 1$, les moments calculés par transfert sont

$$\mathbb{E}(X^{a-1}) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a),$$

$$\mathbb{E}((X^{a-1})^2) = \int_0^{+\infty} t^{2a-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(2a-1).$$

Les paramètres a et $2a-1$ sont strictement positifs, donc ces intégrales sont finies. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(X^{a-1}) = \Gamma(a), \qquad \mathbb{V}(X^{a-1}) = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2.}$$

Pour $a = 1$, $X^{a-1} = 1$ presque sûrement et la variance vaut 0.

b) Par linéarité, $\mathbb{E}(M_n) = \Gamma(a)$: l'estimateur est sans biais. Les variables X_k^{a-1} sont indépendantes et de même loi, de variance finie calculée en a), donc

$$\mathbb{V}(M_n) = \frac{\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}{n}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(|M_n - \Gamma(a)| > \varepsilon) \leq \frac{\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

M_n est sans biais et convergent en probabilité vers $\Gamma(a)$.

c) La fonction fournie est

```
def Myst(n):
    U = rd.random(n)
    X = -np.log(1 - U)
    return X
```

Les coefficients de U simulent des uniformes indépendantes. Pour une uniforme théorique U sur $]0,1[$, posons $W = -\ln(1-U)$. Pour $t < 0$, $\mathbb{P}(W \leq t) = 0$, et pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(W \leq t) = \mathbb{P}(U \leq 1 - \mathrm{e}^{-t}) = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

Ainsi $W \sim \mathcal{E}(1)$. Les transformations étant appliquées séparément, les coefficients produits restent indépendants.

`Myst(n)` renvoie un tableau de n simulations indépendantes de $\mathcal{E}(1)$.

d) On utilise la moyenne des puissances des tirages fournis par `Myst(n)`, conformément à l'estimateur de b).

```
def Approx(n, a):
    X = Myst(n)
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + X[k] ** (a - 1)
    return s / n
```

`Approx(n,a)` renvoie une approximation de $\Gamma(a)$, $\quad n \geq 1,\ a \geq 1.$