

ECRICOME

Mathématiques approfondies – Sujet 1

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2025

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : séries ; intégrales.</i>	<i>2</i>
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; Python.</i>	<i>3</i>
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : intégrales généralisées ; variables à densité ; estimations ; Python. . .</i>	<i>4</i>

1 Exercice 1

Thèmes abordés : séries ; intégrales.

1. a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
- b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.
- c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2. Montrer que $A - B = 2C$ et $A = C + \frac{1}{4}A$.
3. a) Justifier que, pour tout couple (α, β) de réels,

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

- b) Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi[$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
 - a) Montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$.
 - b) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

- c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.

5. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $\varphi(t) = \frac{t}{\sin(t/2)}$.

- a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et déterminer φ' .
- b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0. On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.
- c) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
- d) Soit f définie sur $[0, \pi[$ par $f(t) = \frac{\pi - t}{\cos(t/2)}$. On admet que, pour tout $t \in [0, \pi[$, $f(t) = \varphi(\pi - t)$. Justifier que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

6. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k ,

$$\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul N ,

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. a) Montrer que $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- b) En déduire les valeurs de A et de B .

2 Exercice 2

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; Python.

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1

- Justifier que la famille $(I_3, M, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6, M^7, M^8, M^9)$ est liée.
 - En déduire qu'il existe un polynôme annulateur non nul de M , de degré inférieur ou égal à 9.
- On admet que $\varphi : x \mapsto x^3 - 4x^2 - 12x - 28$ est un polynôme annulateur de M .
 - Écrire une fonction Python, nommée `PolyAnn`, prenant en entrée une matrice M et renvoyant `True` si φ est un polynôme annulateur de M , et `False` sinon.
 - Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_3 , M et M^2 .
- Montrer que, si λ est une valeur propre de M , alors $\varphi(\lambda) = 0$.
 - En étudiant φ , montrer que M admet au plus une valeur propre réelle et qu'elle est strictement supérieure à 4. On admet que $\varphi\left(4 - \frac{2\sqrt{13}}{3}\right) < 0$.
 - La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie 2

On pose $S = {}^tMM$.

- Justifier que S est symétrique.
- Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives.
- Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $S = PD^tP$. On admet que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$.
- Combien existe-t-il de matrices diagonales Δ telles que $\Delta^2 = D$? On note, dans la suite, Δ une telle matrice.
 - Justifier que Δ est inversible.
- Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle telle que $R^2 = S$.
- Justifier que R est inversible et exprimer R^{-1} en fonction de P et Δ^{-1} .
- On note $U = MR^{-1}$. Montrer que U est une matrice orthogonale.

Partie 3

On admet qu'il existe une matrice diagonale Δ vérifiant $\Delta^2 = D$ et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère désormais cette matrice Δ et les matrices U et R définies dans la partie précédente, associées à cette matrice, c'est-à-dire $R = P\Delta^t P$, où P est définie à la question 6, $R^2 = S$, R est symétrique réelle et inversible, $U = MR^{-1}$ et U est orthogonale.

On suppose qu'il existe une matrice orthogonale V et une matrice symétrique réelle T , à valeurs propres strictement positives, telles que $M = VT$. On pose $N = {}^t PTP$ et C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de P .

11. Montrer que les valeurs propres de R sont strictement positives.
12. Montrer que $T^2 = S$ et que $N^2 = D$.
13. Montrer que T et S commutent.
14. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$.
 - a) Justifier que $PE_i = C_i$, où E_i est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i , qui vaut 1.
 - b) Justifier que C_i est un vecteur propre de S . On note λ_i la valeur propre associée.
 - c) Montrer que TC_i appartient au sous-espace propre de S associé à λ_i .
 - d) Montrer que TC_i et C_i sont colinéaires.
15. Montrer que N est diagonale.
16. Montrer que $N = \Delta$, puis que $T = R$.
17. Montrer que $V = U$.

3 Problème

Thèmes abordés : intégrales généralisées ; variables à densité ; estimations ; Python.

Partie 1

1. Soient x et y deux réels.
 - a) Déterminer un équivalent simple de $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0.
 - b) En déduire que $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
 - c) À l'aide du changement de variable $s = 1 - t$, montrer que les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$ sont de même nature.
 - d) En déduire que $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, on note $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $B(x, y) = B(y, x)$.
3. Soit $x > 0$. Calculer $B(x, 1)$.

4. a) Montrer que $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
 b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
 c) En déduire que $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y}B(x, y)$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
5. Montrer que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

Partie 2

On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$. On rappelle qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout réel $\nu > 0$, $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

6. a) Déterminer $\Gamma(n+1)$ en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 b) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2t}$.
 Soient $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ et

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

7. a) Justifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge.
 b) Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
8. a) Reconnaître la loi d'une variable aléatoire X de densité $f_{a,1}$. Préciser son espérance et sa variance.
 b) Reconnaître la loi d'une variable aléatoire X de densité $f_{1,b}$. Préciser son espérance et montrer que X admet une variance, puis la déterminer.
9. Soit X une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$.
 a) Déterminer la loi de la variable aléatoire bX .
 b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$, où a_1, a_2 et b sont strictement positifs.
 a) Montrer que $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- b) En déduire que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
 c) Que vaut $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

Partie 3

Pour les questions d'informatique, les bibliothèques sont importées ainsi :

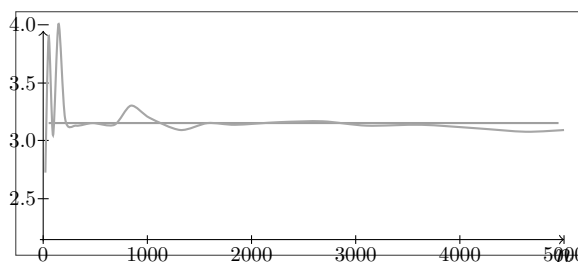
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

11. Soit (x, y) un couple de réels strictement positifs.

- Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance et la déterminer en fonction de x et y . On admet que cette variable aléatoire admet une variance.
- Écrire une fonction Python, nommée `Simul`, qui prend en entrée deux réels x et y strictement positifs et renvoie une simulation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$.
- Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine $B(x, y)$, où, pour tout entier naturel non nul n ,

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1} (1 - U_k)^{y-1}.$$

- Écrire une fonction Python, nommée `Rn`, qui prend en entrée deux réels x et y strictement positifs et un entier n , et renvoie une simulation de R_n .
- Dans la figure suivante, sont représentées différentes simulations de R_n en fonction de n pour $x = y = \frac{1}{2}$. Quel résultat de la partie 2 illustre-t-on ?



12. Soit a un réel supérieur ou égal à 1.

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que X^{a-1} admet une espérance et une variance et les donner.
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel non nul n , on définit $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{a-1}$. Montrer que M_n est un estimateur convergent et sans biais de $\Gamma(a)$.
- Expliquer ce que renvoie la fonction `Myst` suivante :

```
def Myst(n):
    U = rd.random(n)
    X = -np.log(1-U)
    return(X)
```

- Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de $\Gamma(a)$:

```
def Approx(n, a):
    X = Myst(n)
    # plusieurs lignes sont possibles
```