EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2025

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Racines d'une famille de fonctions

Exercice 1 – Variations, équivalents et séries

Pour $n \geq 1$ et $x > n$, on pose $f_n(x) = (x-n)\ln x - x\ln(x-n)$; pour $x > 0$, $g(x) = \ln x/x$. Dans tout ce corrigé, $a_n \sim b_n$ signifie que $a_n/b_n \to 1$, les dénominateurs considérés étant non nuls à partir d'un certain rang.

Corrigé – Exercice 1.

1. Variations de g et comparaison des valeurs entières.

a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = (1-\ln x)/x^2$. Elle est strictement croissante sur $]0,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$. En 0^+, $\ln x \to -\infty$ et $1/x \to +\infty$, donc $g(x) \to -\infty$; en $+\infty$, les croissances comparées donnent $g(x) \to 0$.

x	0^+		e		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

b) Comme $3 > \mathrm{e}$, la suite $(g(k))_{k\geq 3}$ est strictement décroissante. Pour $k \geq 4$, $g(k) \leq g(4) = \ln 4/4 = \ln 2/2$.

$$\boxed{\left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k\geq 3} \text{ décroît}, \qquad \forall k \geq 4, \quad \frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2}.}$$

2. Décroissance de f_n et existence de x_n.

a) Sur $]n,+\infty[$, x et $x-n$ sont strictement positifs. Les deux logarithmes sont donc dérivables, ainsi que leurs produits :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \ln x + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{n}{x} - \frac{n}{x-n}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{n}{x} - \frac{n}{x-n}.}$$

b) Pour $t > 0$, posons $r(t) = t - 1 - \ln t$. Sa dérivée est $r'(t) = (t-1)/t$, négative avant 1, positive après 1. Son minimum est $r(1) = 0$, donc $\ln t \leq t - 1$. En prenant $t = x/(x-n)$, on obtient

$$f_n'(x) \leq \frac{n}{x-n} - \frac{n}{x} - \frac{n}{x-n} = -\frac{n}{x} < 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \ln t \leq t - 1, \qquad f_n \text{ est strictement décroissante sur }]n, +\infty[.}$$

c) Pour $n \geq 2$, f_n est continue sur $[n+1, n+2]$ et

$$f_n(n+1) = \ln(n+1) > 0,$$

$$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2 \leq 0$$

par 1.b), puisque $n + 2 \geq 4$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une racine dans cet intervalle ; la stricte décroissance donne son unicité.

$$\boxed{\exists! x_n \in [n+1, n+2], \quad f_n(x_n) = 0, \qquad n + 1 < x_n \leq n + 2.}$$

Pour $n = 2$, $f_2(4) = 0$, donc $x_2 = 4$. Pour $n > 2$, la comparaison en $n + 2 > 4$ est stricte et $x_n < n + 2$.

3. Premier équivalent de x_n.

L'encadrement précédent donne $1 + 1/n < x_n/n \leq 1 + 2/n$. Les deux bornes tendent vers 1, donc

$$\boxed{\frac{x_n}{n} \longrightarrow 1, \qquad x_n \sim n.}$$

4. Limite du décalage $x_n - n$.

a) L'égalité $f_n(x_n) = 0$ donne $(x_n - n)\ln x_n = x_n \ln(x_n - n)$. Comme $x_n > 0$, on peut diviser par x_n :

$$\boxed{\ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}.}$$

b) On a $x_n \to +\infty$, donc $\ln x_n / x_n \to 0$ par les croissances comparées. Par ailleurs $1 < x_n - n \leq 2$. Ainsi $0 < \ln(x_n - n) \leq 2\ln x_n / x_n \to 0$. La continuité de l'exponentielle donne

$$\boxed{\frac{\ln x_n}{x_n} \longrightarrow 0, \qquad x_n - n \longrightarrow 1.}$$

5. Équivalent de $u_n = x_n - n - 1$.

On a $0 < u_n \leq 1$ et $u_n \to 0$.

a) La dérivabilité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0 donne $\ln(1+u_n)/u_n \to 1$. D'autre part,

$$\frac{\ln(n+1+u_n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 + (1+u_n)/n)}{\ln n} \longrightarrow 1.$$

En effet le numérateur du dernier quotient tend vers 0 et son dénominateur vers $+\infty$.

$$\boxed{\ln(1+u_n) \sim u_n, \qquad \ln(n+1+u_n) \sim \ln n.}$$

b) La question 4.a) devient

$$\ln(1+u_n) = (1+u_n)\frac{\ln(n+1+u_n)}{n+1+u_n}.$$

En divisant par $\ln n/n$, on trouve

$$\frac{\ln(1+u_n)}{\ln n/n} = (1+u_n)\frac{\ln(n+1+u_n)}{\ln n}\frac{n}{n+1+u_n} \longrightarrow 1.$$

En combinant avec a),

$$\boxed{\frac{u_n}{\ln n/n} \longrightarrow 1, \qquad u_n \sim \frac{\ln n}{n}.}$$

6. Nature des séries de termes u_n et u_n^2.

Les termes sont positifs et $u_n \sim \ln n/n$. Pour $n \geq 3$, $\ln n/n \geq 1/n$; la série harmonique diverge. Par comparaison et équivalence entre termes positifs, $\sum u_n$ diverge. Pour le carré, $u_n^2 \sim (\ln n)^2/n^2$. Les croissances comparées donnent $(\ln n)^2/\sqrt{n} \to 0$, donc, pour n assez grand, $(\ln n)^2/n^2 \leq 1/n^{3/2}$. La série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$ converge.

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ diverge vers } +\infty, \qquad \sum_{n\geq 2} u_n^2 \text{ converge.}}$$

Exercice 2 – Composition de projections orthogonales

Exercice 2 – Norme, symétrie et commutation

Pour $i = 1, 2, 3$, p_i désigne la projection orthogonale sur F_i. Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.

Corrigé – Exercice 2.

1. Norme d'une projection orthogonale.

a) Si $x \in F$, $p(x) = x$, donc $\|p(x)\| = \|x\|$.

$$\boxed{F \subset \{x \in E : \|p(x)\| = \|x\|\}.}$$

b) La décomposition $x = p(x) + (x - p(x))$ est orthogonale, puisque $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. Par le théorème de Pythagore,

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.}$$

c) Si $\|p(x)\| = \|x\|$, b) donne $\|x - p(x)\|^2 = 0$, donc $x = p(x) \in F$. Avec a), cela prouve l'égalité des ensembles. Par ailleurs b) donne $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ pour tout x.

$$\boxed{F = \{x \in E : \|p(x)\| = \|x\|\}, \qquad \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.}$$

2. Lorsque $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale.

On suppose $p_1 \circ p_2 = p_3$.

a) Si $x \in F_1 \cap F_2$, $p_1(x) = p_2(x) = x$; donc $p_3(x) = p_1(p_2(x)) = x$, d'où $x \in F_3$.

$$\boxed{F_1 \cap F_2 \subset F_3.}$$

b) Pour $x \in F_3$, $p_3(x) = x$. La contraction de 1.c), appliquée à p_1, donne

$$\|x\| = \|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|.$$

La même question appliquée à p_2 donne l'inégalité opposée. Ainsi $\|p_2(x)\| = \|x\|$, donc $x \in F_2$ et $p_2(x) = x$. On a alors $x = p_3(x) = p_1(x)$, donc $x \in F_1$.

$$\boxed{x \in F_3 \implies \|x\| \leq \|p_2(x)\|, \quad x \in F_1 \cap F_2.}$$

c) Les deux inclusions obtenues donnent

$$\boxed{F_3 = F_1 \cap F_2.}$$

d) Le projecteur orthogonal p_3 est symétrique : $\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle$. La symétrie de p_1 puis de p_2 donne également

$$\langle x, p_1(p_2(y))\rangle = \langle p_1(x), p_2(y)\rangle = \langle p_2(p_1(x)), y\rangle.$$

Puisque $p_3 = p_1 \circ p_2$, on en déduit

$$\boxed{\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle, \quad \langle p_1(p_2(x)), y\rangle = \langle p_2(p_1(x)), y\rangle.}$$

e) Pour chaque x, le vecteur $z = p_1(p_2(x)) - p_2(p_1(x))$ a un produit scalaire nul avec tout y d'après d). En choisissant $y = z$, on obtient $\|z\|^2 = 0$, donc $z = 0$.

$$\boxed{p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1.}$$

3. Lorsque les deux projections commutent.

On suppose $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

a) Les applications p_i sont linéaires et $p_i^2 = p_i$. Grâce à la commutation,

$$p^2 = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2 = p.$$

$$\boxed{p \text{ est un projecteur de } E.}$$

b) Par symétrie des p_i puis commutation,

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p_2(x), p_1(y)\rangle = \langle x, p_2(p_1(y))\rangle = \langle x, p(y)\rangle.$$

$$\boxed{p \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

c) Le résultat rappelé dans l'énoncé assure donc que p est orthogonal. Précisons son image : $p(x) = p_1(p_2(x)) \in F_1$ et, par commutation, $p(x) = p_2(p_1(x)) \in F_2$. Réciproquement, pour $x \in F_1 \cap F_2$, $p(x) = x$. Ainsi $\mathrm{Im}(p) = F_1 \cap F_2$ et

$$\boxed{p_1 \circ p_2 \text{ est la projection orthogonale sur } F_1 \cap F_2.}$$

4. Énoncé du résultat obtenu.

$$\boxed{\begin{array}{c} p_1 \circ p_2 \text{ est une projection orthogonale } \iff p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1; \\ \text{dans ce cas, son image est } F_1 \cap F_2. \end{array}}$$

Même si F_1 et F_2 sont non triviaux, leur intersection peut être $\{0\}$; la conclusion inclut alors la projection nulle. Les preuves précédentes restent valables dans ce cas.

Exercice 3 – Une loi et la convergence d'un maximum

Exercice 3 – Densités, moments et convergence en loi

La densité proposée est $f(x) = -2xe^{-x^2}$ pour $x \leq 0$, et 0 pour $x > 0$. On note F la fonction de répartition de X.

Corrigé – Exercice 3.

Partie 1 – Étude de la variable X

1. Vérification de la densité.

Pour $x \leq 0$, $-2x \geq 0$, donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est continue, y compris en 0. Comme $x \mapsto e^{-x^2}$ est une primitive de $-2xe^{-x^2}$, pour $R > 0$,

$$\int_{-R}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-R^2} \longrightarrow 1.$$

L'intégrale sur $]0, +\infty[$ est nulle. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. Fonction de répartition de X.

Pour $x \leq 0$, l'intégrale de la densité entre $-\infty$ et x vaut e^{-x^2} ; pour $x > 0$, toute la probabilité est déjà atteinte.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}}$$

En particulier F est continue en 0.

3. Densité de la normale de variance $1/2$.

Une variable N de loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$ admet la densité

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).}$$

4. Espérance de X.

La normale N de la question 3 possède un second moment égal à $1/2$. Sa densité g est paire, donc

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

L'espérance absolue de X est finie, car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < +\infty.$$

On peut donc calculer l'espérance :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = -2\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

5. Loi de $Z = X^2$.

Pour $x < 0$, $G(x) = 0$, puisque $Z \geq 0$. Pour $x \geq 0$, $X \leq 0$ et la loi de X est à densité, donc

$$G(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq 0) = 1 - F(-\sqrt{x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Cela vaut aussi en $x = 0$, où la probabilité est nulle.

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0, \end{cases} \qquad Z \sim \mathcal{E}(1).}$$

6. Variance de X.

La loi exponentielle de paramètre 1 a une espérance égale à 1. Comme $X^2 = Z$, X possède un second moment et $\mathbb{E}(X^2) = 1$. Avec la question 4,

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.}$$

7. Simulation et estimation de l'espérance.

Comme $X \leq 0$, $X = -\sqrt{Z}$ avec $Z \sim \mathcal{E}(1)$. Chaque tirage exponentiel permet donc de produire un tirage de X.

```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i] = -np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M


def EsperanceX(n):
    M = simulX(n)
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + M[i]
    return s / n
```

La seconde fonction calcule la moyenne des simulations par une boucle, sans appeler de fonction d'une bibliothèque.

$$\boxed{\texttt{simulX(n)} \text{ simule } n \text{ réalisations de } X, \qquad \texttt{EsperanceX(n)} \text{ approche } -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

On suppose $n \geq 1$. Cette moyenne a pour espérance $\mathbb{E}(X)$ et pour variance $(1 - \pi/4)/n$, par indépendance des simulations ; l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev justifie son approximation lorsque n augmente.

Partie 2 – Étude d'une convergence en loi

8. Vérification de la densité h.

La fonction h est nulle hors $[0, 1]$ et vaut $2(1-x) \geq 0$ sur cet intervalle. Elle est continue par morceaux, avec éventuellement une discontinuité en 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2(1-x)\,\mathrm{d}x = [2x - x^2]_0^1 = 1.$$

$$\boxed{h \text{ est une densité de probabilité.}}$$

9. Fonction de répartition de Y.

L'intégrale de h est nulle avant 0, vaut $2x - x^2$ entre 0 et 1, puis vaut 1 :

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x - x^2 = 1 - (1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}}$$

10. Fonction de répartition de T_n.

Pour tout réel x, comme $\sqrt{n} > 0$,

$$[T_n \leq x] = \left[M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right] = \bigcap_{i=1}^{n} \left[Y_i \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right].$$

L'indépendance des Y_i et leur loi commune donnent

$$\boxed{F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.}$$

Avec la question 9, on peut aussi préciser

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\sqrt{n}, \\ (1 - x^2/n)^n, & -\sqrt{n} \leq x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}}$$

11. Limite de $(1 + y/n)^n$.

Si $y = 0$, le terme vaut toujours 1. Si $y \neq 0$, pour n assez grand, $1 + y/n > 0$; les éventuels termes antérieurs ne jouent aucun rôle dans la limite. La dérivabilité du logarithme en 1 donne

$$n \ln(1 + y/n) = y \, \frac{\ln(1 + y/n)}{y/n} \longrightarrow y.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^y.}$$

12. Convergence en loi vers X.

Pour $x < 0$ fixé, on a $-\sqrt{n} \leq x < 0$ pour n assez grand, donc $F_n(x) = (1 - x^2/n)^n \to \mathrm{e}^{-x^2}$ d'après 11. Pour $x \geq 0$, $F_n(x) = 1$ pour tout n. Ainsi $F_n(x) \to F(x)$ pour tout réel x. La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}$, ceci est la définition de la convergence en loi :

$$\boxed{T_n = \sqrt{n}(M_n - 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X.}$$

Problème – Coefficients binomiaux et intégrales de Wallis

Problème – Estimations, nombres de retours et somme d'une série

On pose $B_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ pour $n \geq 0$. Tous les B_n sont strictement positifs, et $B_0 = 1$.

Corrigé – Problème.

Partie 1 – Calcul des termes B_n

1. Expression du produit et programme.

Pour $n \geq 1$, la formule factorielle du coefficient binomial donne

$$B_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{4^n\, 1 \cdot 2 \cdots n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{4k}.$$

Pour $n = 0$, le produit vide vaut 1, comme B_0.

$$\boxed{\forall n \geq 0, \qquad B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{4k}.}$$

```
def B(n):
    P = 1
    for k in range(1, n + 1):
        P = P * (k + n) / (4 * k)
    return P
```

`B(n)` calcule B_n pour $n \geq 0$.

Partie 2 – Estimations de B_n

2. Deux premières intégrales.

Par définition et calcul de primitive,

$$\boxed{W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.}$$

3. Décroissance de la suite (W_n).

Pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin(t)^{n+1} \leq \sin(t)^n$. En intégrant cette inégalité,

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad W_{n+1} \leq W_n.}$$

Toutes ces intégrales sont strictement positives, puisque leur intégrande est strictement positif sur $]0, \pi/2[$.

4. Relation de récurrence.

Sur le segment $[0, \pi/2]$, posons $u(t) = \sin(t)^{n+1}$ et $v(t) = -\cos t$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'(t) = (n+1)\sin(t)^n \cos t$ et $v'(t) = \sin t$. L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [-\sin(t)^{n+1}\cos t]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}), \end{aligned}$$

car les termes de bord sont nuls et $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. On obtient

$$\boxed{\forall n \geq 0, \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

5. Expressions des termes pairs et impairs.

La formule factorielle de B_n donne

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Pour $n = 0$, on a $W_0 = (\pi/2)B_0$ et $W_1 = 1/((2\cdot 0+1)B_0)$. Supposons les deux formules vraies à l'indice n. La question 4 et la relation entre les B_n donnent

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} B_n = \frac{\pi}{2} B_{n+1},$$

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{(2n+1)B_n} = \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \geq 0, \qquad W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n, \qquad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.}$$

6. Expression de W_{2n-1}.

Pour $n \geq 1$, la question 5 donne $W_{2n-1} = 1/((2n-1)B_{n-1})$. Or $B_n = ((2n-1)/(2n))B_{n-1}$, donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \qquad W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}.}$$

7. Encadrement de B_n.

La décroissance de (W_n) donne $W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$. En utilisant 5 et 6,

$$\boxed{\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}.}$$

Comme $B_n > 0$, on en déduit

$$\frac{2}{\pi(2n+1)} \leq B_n^2 \leq \frac{1}{\pi n}.$$

Pour la borne inférieure demandée, $2/(2n+1) \geq 1/(n+1)$. En prenant les racines positives,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

8. Équivalent de B_n.

La question 7 donne $\sqrt{n/(n+1)} \leq \sqrt{\pi n}\, B_n \leq 1$. Les deux bornes tendent vers 1, donc

$$\boxed{\sqrt{\pi n}\, B_n \longrightarrow 1, \qquad B_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

Partie 3 – Nombre de sommes partielles nulles

9. Loi des sommes partielles S_n.

a) Puisque X_k ne prend que les valeurs -1 et 1, les deux probabilités égales ont pour somme 1 ; elles valent donc $1/2$. Ainsi $Y_k = (X_k + 1)/2$ prend les valeurs 0 et 1 avec probabilités $1/2$.

$$\boxed{Y_k \sim \mathcal{B}(1, 1/2), \qquad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{V}(Y_k) = \frac{1}{4}.}$$

b) On a $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Les Y_k sont indépendantes, comme fonctions séparées des X_k. La somme de ces n variables de Bernoulli de paramètre $1/2$ suit une loi binomiale :

$$\boxed{T_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2), \qquad \mathbb{P}(T_n = j) = \binom{n}{j} 2^{-n} \quad (0 \leq j \leq n).}$$

c) Comme $S_n = 2T_n - n$, les valeurs possibles sont les $2j - n$. Chacune est effectivement prise avec une probabilité strictement positive, puisque les probabilités binomiales ci-dessus le sont.

$$\boxed{S_n(\Omega) = \{2j - n : 0 \leq j \leq n\}, \qquad \mathbb{P}(S_n = 2j - n) = \binom{n}{j} 2^{-n}.}$$

En dehors de cet ensemble, les probabilités sont nulles.

10. Espérance du nombre de retours R_n.

a) La question 9.c) montre que S_k a la même parité que k. En particulier, une somme d'un nombre impair de termes ± 1 ne peut pas être nulle. Seuls les indices pairs contribuent donc :

$$\boxed{R_n = \mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, n\} : S_{2k} = 0\}.}$$

b) Pour S_{2k}, la valeur 0 correspond à $j = k$ dans 9.c).

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} 2^{-2k} = B_k.}$$

c) Chaque indicatrice vaut 1 exactement lorsqu'un retour est compté. En les additionnant,

$$\boxed{R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}, \qquad A_k = [S_{2k} = 0].}$$

d) La variable R_n est bornée entre 0 et n, donc possède une espérance. Par linéarité, sans supposer les événements A_k indépendants,

$$\boxed{\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} B_k.}$$

11. Deux inégalités pour $1/\sqrt{k}$.

En rationalisant les différences de racines, pour $k \geq 1$,

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Les dénominateurs restent strictement positifs pour $k = 1$.

$$\boxed{\forall k \geq 1, \qquad 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}).}$$

12. Équivalent de l'espérance de R_n.

La question 7 donne

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \mathbb{E}(R_n) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En appliquant la borne inférieure de 11 à $k+1$, puis la borne supérieure à k, les sommes se télescopent :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+2}-\sqrt{2}) \leq \mathbb{E}(R_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

En divisant par $2\sqrt{n/\pi}$, la borne inférieure et la borne supérieure tendent vers 1. Ainsi

$$\boxed{\frac{\mathbb{E}(R_n)}{2\sqrt{n/\pi}} \longrightarrow 1, \qquad \mathbb{E}(R_n) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.}$$

Partie 4 – Étude de la fonction f

13. Équivalent du coefficient et convergence de la série.

a) Comme $\binom{2n}{n} = 4^n B_n$, la question 8 donne

$$\frac{1/\binom{2n}{n}}{\sqrt{\pi n}/4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}\, B_n} \longrightarrow 1.$$

$$\boxed{\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}.}$$

b) Si $x = 0$, tous les termes de la série sont nuls. Pour $0 < x < 4$, posons $q = x/4 \in]0,1[$. La borne inférieure de B_n en 7 donne

$$0 \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{q^n}{B_n} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\, q^n \leq \sqrt{\pi}(n+1)q^n.$$

La série $\sum(n+1)q^n$ converge : pour $q < r < 1$, $(n+1)(q/r)^n \to 0$ par les croissances comparées, donc $(n+1)q^n \leq r^n$ à partir d'un certain rang. La série géométrique de raison $r < 1$ converge ; la comparaison donne

$$\boxed{\forall x \in [0,4[, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \text{ converge.}}$$

14. Croissance de f.

Pour $0 \leq x < y < 4$ et tout $N \geq 1$, les termes sont positifs et

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{y-x}{\binom{2}{1}} = \frac{y-x}{2}.$$

Les deux sommes finies convergent respectivement vers $f(y)$ et $f(x)$. En passant à la limite dans cette inégalité,

$$\boxed{f(y) - f(x) \geq \frac{y-x}{2} > 0, \qquad f \text{ est strictement croissante sur } [0,4[.}$$

15. Encadrement de f et limites aux bornes.

a) Pour $n \geq 1$, la question 7 donne $\sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq 1/B_n \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}$. Comme $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \leq n+1$, en multipliant par $(x/4)^n \geq 0$, on obtient

$$\boxed{\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n.}$$

b) Posons $q = x/4 \in [0,1[$. On sait $\sum_{n\geq 1} q^n = q/(1-q)$. Pour calculer la somme pondérée, on part d'une identité entre sommes *finies*, obtenue en décalant les indices :

$$(1-q)\sum_{n=1}^{N} nq^n = \sum_{n=1}^{N} q^n - Nq^{N+1}.$$

Comme $Nq^{N+1} \to 0$ pour $0 \leq q < 1$, on obtient $\sum_{n\geq 1} nq^n = q/(1-q)^2$. On somme les inégalités de a) puis on prend la limite des sommes partielles :

$$\boxed{\sqrt{\pi}\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x/4}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right).}$$

En 0^+, les deux bornes tendent vers 0. En 4^-, la borne inférieure tend vers $+\infty$. Comme $f(0) = 0$, on conclut

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0), \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty, \qquad f \text{ est continue en } 0.}$$

La continuité sur $]0,4[$ est admise dans l'énoncé.

16. Comparaison avec la droite $y = x/2$.

Le premier terme de la somme définissant f vaut $x/2$ et tous les autres sont positifs ou nuls. Pour $x > 0$, le deuxième terme $x^2/6$ est strictement positif. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,4[, \quad f(x) \geq \frac{x}{2}, \qquad x > 0 \implies f(x) > \frac{x}{2}.}$$

17. Allure de la courbe.

L'égalité admise $f(x) = x/2 + o(x)$ en 0 signifie ici que $(f(x) - x/2)/x \to 0$ lorsque $x \to 0^+$. Comme $f(0) = 0$, elle donne la dérivée à droite $f'_+(0) = 1/2$. La demi-tangente en l'origine est donc $y = x/2$. D'après 14–16, la courbe est continue et strictement

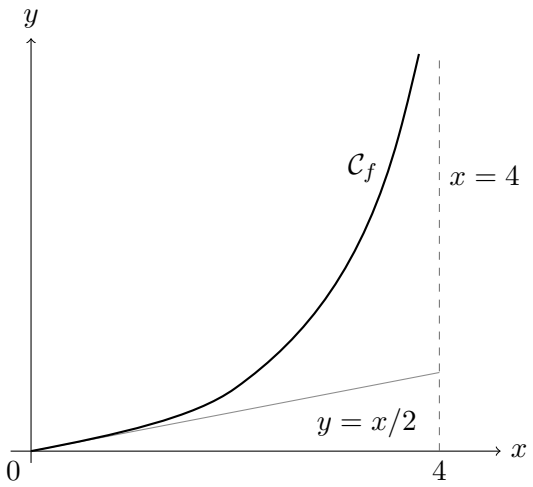
croissante sur $[0,4[$, reste strictement au-dessus de cette tangente pour $x>0$, et admet la droite verticale $x=4$ comme asymptote.

$$\boxed{f(0)=0, \quad f'_+(0)=\frac{1}{2}, \quad f(x)>\frac{x}{2}\ (0<x<4), \quad \lim_{x\to 4^-} f(x)=+\infty.}$$

Pour préciser l'allure sans dériver la somme, on peut aussi établir sa convexité directement. Pour chaque entier $n\geq 1$, la fonction $x\mapsto x^n$ est convexe sur $[0,4[$: elle est affine si $n=1$, et sa dérivée seconde $n(n-1)x^{n-2}$ est positive ou nulle si $n\geq 2$. Chaque somme partielle définissant f est donc convexe. Pour $x,y\in[0,4[$ et $\theta\in[0,1]$, on écrit l'inégalité de convexité pour ces sommes finies puis on passe à la limite :

$$f(\theta x+(1-\theta)y)\leq \theta f(x)+(1-\theta)f(y).$$

Ceci est précisément la définition de la convexité de f.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } [0,4[.}$$

Le dessin ci-dessous traduit ces propriétés ; il représente une allure qualitative, sans attribuer de valeurs numériques supplémentaires à f.