

Année : 2025

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

Sommaire

Exercice 1	1
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries . . .</i>	1
Exercice 2	1
<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ;</i>	
<i>algèbre bilinéaire</i>	2
Exercice 3	3
<i>Thèmes abordés : Variables à densité ; convergences de variables</i>	
<i>; Python</i>	3
Problème	5
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries ;</i>	
<i>intégrales ; Probabilité discrètes ; Python</i>	5

Exercice 1

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n)$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1) a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises.

b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2) a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.

b) Montrer que pour tout réel $t > 0, \ln(t) \leq t - 1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

3) Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4) a) Justifier que:

$$\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.

5) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

a) Justifier que:

$$\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1 + n + u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6) Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .

Exercice 2

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

Soit E un espace euclidien.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On rappelle le résultat de cours suivant : si p est un projecteur de E , alors p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique de E .

Dans la suite de l'exercice, les sous-espaces vectoriels considérés de E seront non triviaux (différents de E et ne contenant pas uniquement le vecteur nul).

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F .

a) Montrer l'inclusion suivante :

$$F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.

c) En déduire que :

$$F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$$

et que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la projection orthogonale sur F_i .

2) On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

a) Montrer que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

b) Soit x un vecteur de F_3 . En utilisant la question 1.(c), montrer que :

$$\|x\| \leq \|p_2(x)\|.$$

En déduire que x appartient à F_2 puis montrer que x appartient à F_1 .

c) Qu'en déduit-on pour les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et F_3 ?

d) Justifier que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle,$$

et en déduire l'égalité suivante :

$$\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y \rangle.$$

e) Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3) On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

- a) Montrer que p est un projecteur de E .
 - b) Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E .
 - c) En déduire que $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à préciser.
- 4) Énoncer précisément le résultat démontré dans les questions 2 et 3.

Exercice 3

Thèmes abordés : Variables à densité ; convergences de variables ; Python

On suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Partie 1. Étude d'une variable aléatoire

- 1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) =]-\infty, 0]$, de densité f , et on note F sa fonction de répartition.

- 2) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$.
- 3) Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- 4) En déduire que X admet une espérance et calculer celle-ci.

On pose $Z = X^2$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.

- 5) Pour tout réel positif x , exprimer $G(x)$ en fonction de F et de x . En déduire que Z suit une loi exponentielle de paramètre 1.
- 6) En déduire que X admet une variance et donner sa valeur.
- 7) On souhaite dans cette question simuler la variable X à l'aide de Python. On considère importées les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` de la manière suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On rappelle que l'instruction `rd.exponential(1)` permet de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter le code suivant afin qu'il simule n réalisations de la variable X (la fonction renvoie alors une matrice ligne constituée de ces réalisations).

```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n) # Matrice ligne de taille n constituée de 0
    for i in range(n):
        # Compléter ici pour simuler X
    return M
```

Écrire alors une fonction Python nommée `EsperanceX`, prenant en entrée un entier naturel n , et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X , en utilisant le résultat de `simulX(n)` (et sans aucune fonction venant d'une bibliothèque particulière).

Partie 2. Étude d'une convergence en loi

On définit une fonction h par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- 8) Montrer que h peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega) = [0, 1]$, de densité h , et on note H sa fonction de répartition.

- 9) Déterminer pour tout réel x , l'expression de $H(x)$.

On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que Y .

On définit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ et on admet que M_n est elle aussi une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose pour finir $T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

- 10) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de T_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right]^n.$$

- 11) Déterminer, pour tout réel y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$.

- 12) En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .

Problème

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; séries ; intégrales ; Probabilité discrètes ; Python

On considère la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, toujours à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k \geq 0}$, $\prod_{k=1}^0 u_k = 1$ par convention.

On rappelle aussi que si p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$, $\llbracket p; q \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre p (inclus) et q (inclus).

Partie 1

1) Justifier que pour tout entier naturel n , on a :

$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}.$$

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de B_n .

```
def B(n):
    P = ...      # Initialisation
    for k in range(...):
        P = ...
    return P
```

Partie 2

On pose pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$.

2) Calculer W_0 et W_1 .

3) Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

5) En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$

6) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}.$$

7) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n},$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

8) En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X_n = 1) = P(X_n = -1).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. Préciser son espérance et sa variance.

b) En déduire la loi de la variable T_n définie par $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k$.

c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et déterminer la loi de S_n .

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble

$$\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : S_k = 0\}.$$

Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tels que $S_k(\omega) = 0$.

a) Justifier que :

$$R_n = \text{Card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : S_{2k} = 0\}.$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$P(S_{2k} = 0) = B_k.$$

c) On rappelle que pour un événement A , la fonction indicatrice de A définie de Ω dans $\mathbb{R}$, notée 1_A , est définie par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k = \{S_{2k} = 0\}$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k .

d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k.$$

11) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

12) En déduire alors, à l'aide des résultats de la partie 2 puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4

13) a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14) Justifier que f est croissante sur $[0, 4[$.

On admet dans la suite que f est continue sur $]0, 4[$.

15) a) Montrer que pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right).$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et en 4^- . Qu'en déduit-on pour f en 0 ?

16) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \frac{x}{2}$.

17) On admet que :

$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f .