

emlyon

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2025

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Problème 1 – Intégrales et polynômes orthogonaux

Problème 1 – Une suite d'intégrales et un endomorphisme symétrique

On pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$ et $J_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$. L'équivalence $a_n \sim b_n$ signifie que $a_n/b_n \rightarrow 1$ lorsque les termes du dénominateur sont non nuls à partir d'un certain rang.

Corrigé – Problème 1.

Partie I – Une suite d'intégrales

1. Existence et lien entre les intégrales.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (1 - t^2)^n$ est une fonction polynomiale, donc continue sur les segments $[0, 1]$ et $[-1, 1]$. Les intégrales sont ainsi bien définies. Comme l'intégrande est paire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = 2I_n.$$

2. Premier terme.

$$I_0 = \int_0^1 1 dt = 1.$$

3. Décroissance de (I_n) .

Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$, donc $(1 - t^2)^{n+1} \leq (1 - t^2)^n$. En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on obtient

$$\forall n \geq 0, \quad I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Relation de récurrence par intégration par parties.

Pour $n \geq 1$, sur le segment $[0, 1]$, posons $u(t) = (1 - t^2)^n$ et $v(t) = t$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'(t) = -2nt(1 - t^2)^{n-1}$ et $v'(t) = 1$. L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_n &= [t(1 - t^2)^n]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{n-1} dt \\ &= 2n(I_{n-1} - I_n), \end{aligned}$$

car le terme de bord est nul et $t^2 = 1 - (1 - t^2)$.

$$\forall n \geq 1, \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

5. Formules explicites.

Pour $n = 0$, $(2^0 0!)^2 / 1! = 1 = I_0$. Supposons la formule vraie à l'indice $n - 1$ avec $n \geq 1$. La question 4 donne

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Par récurrence et avec $J_n = 2I_n$,

$$\forall n \geq 0, \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}, \quad J_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6. Programme de calcul de I_n .

La boucle applique la récurrence à partir de $I_0 = 1$.

```
def I(n):
    i = 1
    for k in range(1, n + 1):
        i = 2 * k * i / (2 * k + 1)
    return i
```

Pour $n = 0$, la boucle est vide et la fonction renvoie bien 1.

$I(n)$ calcule I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

7. Équivalent de J_n .

On écrit $J_n = 2 \cdot 4^n (n!)^2 / ((2n+1)(2n)!)$. La formule de Stirling admise, appliquée à n et à $2n$, donne

$$(n!)^2 \sim 2\pi n (n/e)^{2n}, \quad (2n)! \sim \sqrt{4\pi n} (2n/e)^{2n}.$$

En prenant le quotient et en simplifiant les puissances,

$$J_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Chaque équivalence signifie que le quotient des expressions tend vers 1.

$$J_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II – Des polynômes orthogonaux

8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

Les produits de polynômes sont continus sur $[-1, 1]$, donc l'intégrale est bien définie. La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité ; l'égalité $PQ = QP$ donne la symétrie. Enfin $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$. Si cette intégrale est nulle, la fonction continue positive P^2 est identiquement nulle sur $[-1, 1]$: sinon, par continuité, elle serait strictement positive sur un petit intervalle, donnant une intégrale positive. Le polynôme P aurait alors une infinité de racines ; il est donc nul. Ainsi

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[x].$$

9. La base canonique est-elle orthogonale ?

Comme $n \geq 2$, $e_0 = 1$ et $e_2 = x^2$ appartiennent à B_n . Or $\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3 \neq 0$.

B_n n'est pas une base orthogonale.

10. L'application u est un endomorphisme.

La dérivation et la multiplication par $1 - x^2$ sont linéaires ; leur composition u est donc linéaire. En développant la dérivée,

$$u(P) = (1 - x^2)P'' - 2xP'.$$

Pour un polynôme de degré au plus n , les deux termes ont degré au plus n ; cela inclut les polynômes constants, pour lesquels $u(P) = 0$.

$u : P \mapsto (1 - x^2)P'' - 2xP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11. Action sur la base canonique et valeurs propres.

a) Pour $e_0 = 1$, sa dérivée est nulle. Pour $e_1 = x$, $((1 - x^2)e_1')' = (1 - x^2)' = -2x$.

$$u(e_0) = 0, \quad u(e_1) = -2e_1.$$

b) Pour $k \geq 2$, $e_k' = kx^{k-1}$ et $e_k'' = k(k-1)x^{k-2}$. En remplaçant dans la question 10,

$$u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}.$$

c) Posons $\lambda_r = -r(r+1)$ pour $0 \leq r \leq n$. Si P est un vecteur propre de degré r et de coefficient dominant $a_r \neq 0$, la comparaison des coefficients de x^r dans $u(P) = \lambda P$ impose $\lambda = \lambda_r$. Réciproquement, pour chaque r , on construit un polynôme propre monique $P_r = \sum_{j=0}^r a_j x^j$. On impose $a_r = 1$ et on convient que $a_{r+1} = a_{r+2} = 0$. L'équation au coefficient d'indice $j < r$ est

$$(r(r+1) - j(j+1))a_j + (j+2)(j+1)a_{j+2} = 0.$$

Le premier facteur est strictement positif. En traitant $j = r-1, r-2, \dots, 0$, cette équation détermine donc successivement un unique a_j . La construction produit un vecteur propre de valeur propre λ_r . Enfin, tout vecteur propre associé à λ_r a degré r , car les valeurs $-j(j+1)$ sont distinctes ; ses coefficients inférieurs sont uniquement déterminés par son coefficient dominant selon les mêmes équations. L'espace propre est donc une droite.

$$\text{Sp}(u) = \{-r(r+1) : 0 \leq r \leq n\}, \quad \dim \ker(u + r(r+1) \text{Id}) = 1.$$

Pour $r = 0$, la construction se réduit au polynôme constant 1.

12. Symétrie de u et base orthogonale de polynômes moniques.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, on réalise une intégration par parties sur le segment $[-1, 1]$ avec $v(t) = (1 - t^2)P'(t)$, $v'(t) = u(P)(t)$, $w(t) = Q(t)$ et $w'(t) = Q'(t)$. Les fonctions v, w sont de classe $\mathcal{C}^1$. Les termes de bord sont nuls à cause du facteur $1 - t^2$, d'où

$$\langle u(P), Q \rangle = [(1-t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt = - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt.$$

Cette dernière expression est symétrique en P, Q ; ainsi $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$. L'espace $\mathbb{R}_n[x]$ est euclidien de dimension finie, donc le théorème spectral donne une base orthonormale formée de vecteurs propres de u . Le coefficient dominant de chaque vecteur est non nul. En divisant chaque polynôme par ce coefficient, on obtient une base orthogonale de vecteurs propres moniques.

u est symétrique, $\mathcal{L}_n = (L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale propre monique.

On les ordonne selon leurs degrés : L_k a degré k et est associé à $-k(k+1)$. On peut utiliser la propriété admise de l'énoncé selon laquelle $(L_0, \dots, L_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$.

13. Meilleure approximation d'un polynôme f .

On considère ici $f \in \mathbb{R}_m[x]$ avec $m > n$.

- a) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_m[x]$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[x]$ possède un projecteur orthogonal. Posons T_n égal à la projection de f . Pour tout $g \in \mathbb{R}_n[x]$, les vecteurs $f - T_n$ et $T_n - g$ sont orthogonaux. Pythagore donne

$$\|f - g\|^2 = \|f - T_n\|^2 + \|T_n - g\|^2 \geq \|f - T_n\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $g = T_n$. Cela prouve existence et unicité. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base, $T_n = \sum_{k=0}^n c_k L_k$. La relation $f - T_n \perp \mathbb{R}_n[x]$ donne $\langle f, L_k \rangle = \langle T_n, L_k \rangle = c_k \|L_k\|^2$.

$$T_n = \sum_{k=0}^n c_k L_k \text{ est l'unique meilleure approximation, } c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}.$$

- b) Puisque $f = (f - T_n) + T_n$ est une décomposition orthogonale, $\|f\|^2 = \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2$. L'orthogonalité des L_k donne $\|T_n\|^2 = \sum_k c_k^2 \|L_k\|^2$.

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2.$$

14. Formule explicite et normes des polynômes L_k .

On pose $P_k = (x^2 - 1)^k$ et $Q_k = P_k^{(k)}$.

- a) Le polynôme P_k a degré $2k$ et son coefficient dominant vaut 1. Sa dérivée d'ordre k a donc degré k et coefficient dominant $(2k)(2k-1) \cdots (k+1) = (2k)!/k!$. Pour $k=0$, $P_0 = Q_0 = 1$ et la formule vaut encore.

$$\deg Q_k = k, \quad \text{coefficient dominant de } Q_k = \frac{(2k)!}{k!}.$$

- b) En dérivant directement,

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 2x, \quad Q_2 = 12x^2 - 4.$$

- c) i) Pour $k \geq 1$, $P_k' = 2kx(x^2 - 1)^{k-1}$. En multipliant par $P_1 = x^2 - 1$, on obtient l'identité. Pour $k=0$, les deux membres sont nuls.

$$P_1(x)P_k'(x) = 2kxP_k(x) \quad (k \geq 0).$$

- ii) Pour $k \geq 1$, on dérive cette identité $k + 1$ fois. La formule de Leibniz et les dérivées $P_1' = 2x$, $P_1'' = 2$, $P_1^{(j)} = 0$ pour $j \geq 3$, donnent

$$\begin{aligned}(P_1 P_k')^{(k+1)} &= (x^2 - 1)P_k^{(k+2)} + 2(k+1)xP_k^{(k+1)} + k(k+1)P_k^{(k)}, \\ (2kxP_k)^{(k+1)} &= 2k(xP_k^{(k+1)} + (k+1)P_k^{(k)}).\end{aligned}$$

En identifiant, puis en utilisant $P_k^{(k)} = Q_k$, on trouve $(x^2 - 1)Q_k'' + 2xQ_k' - k(k+1)Q_k = 0$. Pour $k = 0$, $Q_0 = 1$ vérifie directement l'équation.

$$(1 - x^2)Q_k'' - 2xQ_k' + k(k+1)Q_k = 0, \quad u(Q_k) = -k(k+1)Q_k.$$

Pour $k \leq n$, Q_k est donc un vecteur propre non nul de u .

- iii) L'espace propre associé à $-k(k+1)$ a dimension 1 d'après 11.c). Les polynômes L_k et Q_k lui appartiennent ; ils sont proportionnels. Comme L_k est monique et que le coefficient dominant de Q_k est $(2k)!/k!$, le coefficient de proportionnalité est déterminé :

$$L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k \quad (0 \leq k \leq n).$$

- d) Pour $k = 0$, la somme de termes de bord est vide et la formule annoncée est simplement l'identité $\int fg = \int gf$. Supposons la formule vraie à l'ordre k pour tous polynômes f, g . Sur le segment $[-1, 1]$, une intégration par parties, avec $v = f^{(k)}$, $v' = f^{(k+1)}$, $w = g$, $w' = g'$, donne

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(t)g(t) dt = [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g'(t) dt.$$

Toutes ces fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence au couple (f, g') dans la seconde intégrale, les termes de bord ont successivement les signes $+$, $-$, $+$, $\dots$ et le dernier terme est $(-1)^{k+1} \int fg^{(k+1)}$. On obtient donc la formule à l'ordre $k + 1$, ce qui achève la récurrence :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g(t) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t)]_{-1}^1 \\ &\quad + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k)}(t) dt.\end{aligned}$$

- e) i) Le polynôme P_k est monique de degré $2k$; sa dérivée d'ordre $2k$ est donc constante et égale à $(2k)!$. Pour $k = 0$, il s'agit de $P_0 = 1 = 0!$.

$$P_k^{(2k)}(x) = (2k)! \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- ii) Pour $\ell = 0$, prendre $R_{k,0} = 1$. Si $0 \leq \ell < k$ et si la formule est vraie à l'ordre ℓ , la dérivation donne

$$P_k^{(\ell+1)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell-1} \left(2(k-\ell)xR_{k,\ell}(x) + (x^2 - 1)R_{k,\ell}'(x) \right).$$

Le polynôme entre parenthèses a degré au plus $\ell + 1$. On le choisit comme $R_{k,\ell+1}$, ce qui prouve la récurrence.

$$\forall 0 \leq \ell \leq k, \quad P_k^{(\ell)} = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}, \quad \deg R_{k,\ell} \leq \ell.$$

- iii) Si $0 \leq \ell \leq k-1$, $k-\ell \geq 1$; le facteur de b) impose $P_k^{(\ell)}(-1) = P_k^{(\ell)}(1) = 0$. Pour $k = 0$, cette assertion ne porte sur aucun indice. On applique la formule de d) avec $f = P_k$ et $g = Q_k$. Tous les termes de bord sont nuls et $Q_k^{(k)} = P_k^{(2k)} = (2k)!$. Il vient

$$\begin{aligned} \|Q_k\|^2 &= \int_{-1}^1 P_k^{(k)}(t) Q_k(t) dt \\ &= (-1)^k (2k)! \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k dt = (2k)! J_k. \end{aligned}$$

Cette identité vaut aussi pour $k = 0$ par la formule avec somme vide : $Q_0 = L_0 = 1$, donc $\|Q_0\|^2 = 2$ et $\|L_0\| = \sqrt{2}$. La question 5 et la relation de c) donnent

$$\boxed{\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{2k+1}, \quad \|L_k\| = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1} .}$$

Problème 2 – Loi de Cauchy et moyennes empiriques

Problème 2 – Une loi sans espérance et une variable sans variance

La loi de Cauchy est ici définie par sa densité $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$ sur $\mathbb{R}$. Aucune propriété de cette loi n'est supposée connue.

Corrigé – Problème 2.

Partie I – Loi de Cauchy

1. Vérification de la densité.

La fonction f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \arctan x$ est une primitive de $1/(1+x^2)$. Les intégrales en $-\infty$ et $+\infty$ convergent séparément, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1.$$

f est une densité de probabilité.

2. Absence d'espérance et de variance.

Pour $R > 0$,

$$\int_0^R x f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+R^2) \longrightarrow +\infty.$$

La parité de f donne donc $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx = +\infty$. L'espérance de X n'existe pas ; la symétrie de la densité ne permet pas de soustraire les deux intégrales divergentes. De plus $x^2 f(x) \rightarrow 1/\pi$ en $+\infty$, donc $\mathbb{E}(X^2)$ n'est pas finie.

X n'admet ni espérance, ni variance.

3. Fonction de répartition et réciproque.

En intégrant la densité de $-\infty$ à x ,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{\pi} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La fonction F est continue, strictement croissante puisque $F' = f > 0$, et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0 et 1. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Pour $y \in]0, 1[$, l'équation $F(x) = y$ équivaut à $\arctan x = \pi(y - 1/2) \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$F^{-1}(y) = \tan \left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right), \quad y \in]0, 1[.$$

4. Simulation par la fonction réciproque.

a) Pour tout réel x , la stricte croissance de F et de sa réciproque donne

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x),$$

car $F(x) \in]0, 1[$ et U suit la loi uniforme sur cet intervalle. Ainsi les fonctions de répartition sont identiques :

$Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

- b) Le générateur `rd.random()` peut renvoyer 0 et renvoie une valeur strictement inférieure à 1. On retire lorsque la valeur est nulle, pour travailler dans $]0, 1[$.

```
def cauchy():
    U = rd.random()
    while U == 0:
        U = rd.random()
    return np.tan(np.pi * (U - 0.5))
```

`cauchy()` simule une variable de densité f .

5. Densité de $Z = \sqrt{|X|}$.

Pour $z < 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$. Pour $z \geq 0$, par continuité de la loi de X ,

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(-z^2 \leq X \leq z^2) = F(z^2) - F(-z^2) = \frac{2}{\pi} \arctan(z^2).$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0, et de classe $\mathcal{C}^1$ de part et d'autre de 0. Sa dérivée pour $z > 0$ vaut $4z/(\pi(1+z^4))$ et tend vers 0 en 0^+ .

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{4z}{\pi(1+z^4)}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

6. Existence de l'espérance, absence de variance.

La variable Z est positive et

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz.$$

L'intégrande est continu en 0 et équivalent à $1/z^2$ en $+\infty$, c'est-à-dire que leur quotient tend vers 1. L'intégrale de $1/z^2$ sur $[1, +\infty[$ converge ; la comparaison prouve donc l'existence d'une espérance finie. En revanche, $Z^2 = |X|$ et la question 2 donne $\mathbb{E}(Z^2) = +\infty$.

Z admet une espérance finie mais n'admet pas de variance.

7. Calcul explicite de $\mathbb{E}(Z)$.

- a) Notons $D_-(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ et $D_+(x) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$. Leur produit est $(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = 1 + x^4$. En multipliant l'identité demandée par D_-D_+ , on doit avoir

$$x^2 = \alpha x D_+(x) + \beta x D_-(x) = (\alpha + \beta)(x^3 + x) + \sqrt{2}(\alpha - \beta)x^2.$$

L'identification des coefficients donne $\alpha + \beta = 0$ et $\sqrt{2}(\alpha - \beta) = 1$.

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

L'identité est donc vérifiée pour tout $x \geq 0$.

- b) On a $D_{\pm}(x) = (x \pm 1/\sqrt{2})^2 + 1/2 > 0$. Les inverses sont continus sur $[0, +\infty[$ et équivalents à $1/x^2$ en $+\infty$, donc les deux intégrales convergent. Pour l'intégrale avec D_+ , poser $u = \sqrt{2}x + 1$. C'est une bijection affine de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée

$\sqrt{2} > 0$, de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$; le changement de variable conserve la nature de l'intégrale impropre. Puisque $D_+(x) = (u^2 + 1)/2$, il donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{D_+(x)} = \sqrt{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On utilise pour l'autre intégrale la valeur admise dans l'énoncé :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{D_+(x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{D_-(x)} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

- c) On intègre l'identité algébrique fournie dans l'énoncé sur $[0, R]$ avec $R > 0$. Les logarithmes apparaissent comme primitives $D'_\pm/D_\pm$; puisque $D_\pm(0) = 1$ et $\beta = -\alpha$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{D_-(R)}{D_+(R)} \right) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \int_0^R \frac{dx}{D_-(x)} - \frac{\beta\sqrt{2}}{2} \int_0^R \frac{dx}{D_+(x)} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{D_-(R)}{D_+(R)} \right) + \frac{1}{4} \int_0^R \frac{dx}{D_-(x)} + \frac{1}{4} \int_0^R \frac{dx}{D_+(x)}. \end{aligned}$$

Le quotient $D_-(R)/D_+(R)$ tend vers 1 ; son logarithme tend donc vers 0. Les autres intégrales convergent d'après b). On conserve les logarithmes regroupés avant de passer à la limite, ce qui évite toute soustraction d'intégrales divergentes. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

En remplaçant dans la question 6,

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.}$$

8. Interprétation de l'expérience numérique.

Pour n fixé, le programme simule 1000 échantillons indépendants de n variables de même loi que Z . Pour chaque échantillon, il teste si la moyenne s'écarte de $\sqrt{2}$ d'au plus **eps**. Ainsi **mystere(eps,n)** est la fréquence empirique de cet événement, et approche la probabilité

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \sqrt{2} \right| \leq \text{eps} \right).$$

Chaque ligne de l'affichage correspond à une tolérance fixée ; les colonnes correspondent aux tailles d'échantillon croissantes. Les fréquences se rapprochent de 1 lorsque n augmente, même pour les plus petites tolérances. On conjecture donc

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{2}.}$$

On serait tenté d'appliquer la loi faible des grands nombres du cours : la moyenne de variables indépendantes de même loi, possédant une variance finie, converge en probabilité vers leur espérance. L'espérance existe ici, mais la variance n'existe pas d'après 6. Cette version du théorème est donc inapplicable. La partie II démontrera l'extension permettant de justifier la conjecture.

Partie II – Indicatrices et extension d'un théorème

9. Loi d'une variable indicatrice.

L'indicatrice $\mathbf{1}_A$ vaut 1 avec probabilité $\mathbb{P}(A)$ et 0 avec probabilité $1 - \mathbb{P}(A)$.

$$\boxed{\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(1, \mathbb{P}(A)), \quad \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)).}$$

Ces formules comprennent les cas $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. Indicatrice d'un événement et fonction φ_s .

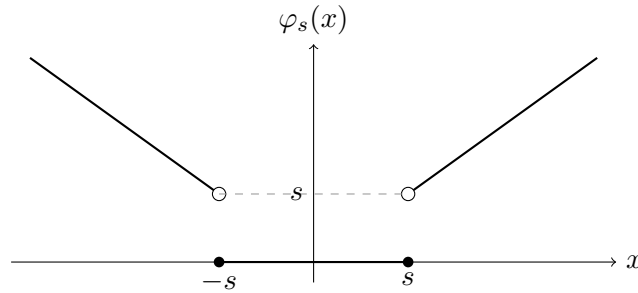
a) Pour chaque ω , les deux expressions valent 1 si $X(\omega) > s$ et 0 sinon. Donc

$$\boxed{\mathbf{1}_{[X > s]}(\omega) = \chi_{]s, +\infty[}(X(\omega)).}$$

b) La fonction vaut $|x|$ si $|x| > s$, et 0 sinon :

$$\boxed{\varphi_s(x) = \begin{cases} -x, & x < -s, \\ 0, & -s \leq x \leq s, \\ x, & x > s. \end{cases} \quad \text{Points de discontinuité : } -s \text{ et } s.}$$

Les points aux abscisses $\pm s$ appartiennent au segment horizontal, pas aux deux demi-droites obliques.



11. Décomposition de X_k .

Les événements $[|X_k| \leq M]$ et $[|X_k| > M]$ forment une partition de Ω ; la somme de leurs indicatrices vaut donc 1.

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad X_k = Y_k + Z_k.}$$

12. Second moment de la variable tronquée Y_k .

Si $|X_k| \leq M$, $Y_k = X_k$ et $|Y_k| \leq M$; sinon $Y_k = 0$. Ainsi $0 \leq Y_k^2 \leq M^2$. La variable Y_k est bornée et possède en particulier un second moment :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_k^2) \leq M^2.}$$

13. Espérances des variables Y_k et Z_k lorsque M augmente.

L'existence de l'espérance de X signifie que $\int_{\mathbb{R}} |x|g(x) dx < +\infty$. Comme $|Z_k| \leq |X_k|$, Z_k possède une espérance absolue finie.

a) Les identités d'indicatrices de 10 donnent $|Z_k| = \varphi_M(X_k)$. La formule de transfert pour cette espérance donne

$$\mathbb{E}(|Z_k|) = \int_{-\infty}^{-M} (-x)g(x) dx + \int_M^{+\infty} xg(x) dx.$$

Les deux termes sont des restes d'intégrales convergentes, donc tendent vers 0 lorsque $M \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|Z_k|) = 0.$$

b) L'inégalité $|\mathbb{E}(Z_k)| \leq \mathbb{E}(|Z_k|)$ donne par encadrement

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_k) = 0.$$

c) La question 11 et la linéarité de l'espérance donnent $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(Z_k)$. Comme $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X) = 0$, on obtient

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k) = 0.$$

14. Une implication issue de l'inégalité triangulaire.

Si $|x| \leq t/2$ et $|y| \leq t/2$, alors $|x + y| \leq |x| + |y| \leq t$. En prenant la contraposée,

$$|x + y| > t \implies |x| > t/2 \text{ ou } |y| > t/2.$$

15. Majoration de la probabilité pour $\bar{X}_n$.

Par 11, $\bar{X}_n = \bar{Y}_n + \bar{Z}_n$. La question 14 donne l'inclusion

$$[|\bar{X}_n| > t] \subset [|\bar{Y}_n| > t/2] \cup [|\bar{Z}_n| > t/2].$$

En utilisant la majoration de la probabilité d'une réunion,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \mathbb{P}(|\bar{Y}_n| > t/2) + \mathbb{P}(|\bar{Z}_n| > t/2).$$

16. Contrôle uniforme de la contribution de $\bar{Z}_n$.

a) On a point par point $\mathbf{1}_{[|\bar{Z}_n| > t/2]} \leq (2/t)|\bar{Z}_n|$. En prenant les espérances, puis en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\mathbb{P}(|\bar{Z}_n| > t/2) \leq \frac{2}{t} \mathbb{E}(|\bar{Z}_n|) \leq \frac{2}{tn} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|Z_k|).$$

Les X_k ont la même loi et la troncature est la même pour tous ; les Z_k ont donc la même loi. Par conséquent

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(|\bar{Z}_n| > t/2) \leq \frac{2}{t} \mathbb{E}(|Z_1|).$$

b) La question 13.a) permet de choisir $M_1 > 0$ tel que, pour $M \geq M_1$, $\mathbb{E}(|Z_1|) \leq t\varepsilon/6$. Avec a), il vient

$$\exists M_1 > 0, \quad M \geq M_1 \implies \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(|\bar{Z}_n| > t/2) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le choix de M_1 dépend de t, ε et de la loi de X , mais pas de n .

17. Contrôle de la contribution de $\bar{Y}_n$.

- a) Les Y_k sont bornées ; tous les produits qui suivent possèdent donc une espérance. On développe le carré de leur somme puis on prend l'espérance par linéarité :

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(Y_i Y_j) \right).$$

- b) Les Y_k sont des fonctions séparées des X_k indépendantes ; elles sont donc indépendantes, et elles ont la même loi. Pour $i \neq j$, $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_j) = \mathbb{E}(Y_1)^2$. Il y a $n(n-1)/2$ couples $i < j$, donc on obtient même une égalité :

$$2 \sum_{i < j} \mathbb{E}(Y_i Y_j) = n(n-1) \mathbb{E}(Y_1)^2 \leq n(n-1) \mathbb{E}(Y_1)^2.$$

- c) La question 12 donne $\sum_k \mathbb{E}(Y_k^2) \leq nM^2$. Les deux résultats précédents donnent alors

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(Y_1)^2 \leq \frac{M^2}{n} + \mathbb{E}(Y_1)^2.$$

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + \mathbb{E}(Y_1)^2.$$

- d) D'après 13.c), $\mathbb{E}(Y_1) \rightarrow 0$ lorsque $M \rightarrow +\infty$. Son carré tend également vers 0. Comme $t^2\varepsilon/12 > 0$,

$$\exists M_2 > 0, \quad M \geq M_2 \implies \mathbb{E}(Y_1)^2 \leq \frac{t^2\varepsilon}{12}.$$

- e) Point par point, $\mathbf{1}_{|\bar{Y}_n| > t/2} \leq (4/t^2) \bar{Y}_n^2$. En prenant l'espérance et en utilisant c), puis d) si $M \geq M_2$,

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n| > t/2) \leq \frac{4}{t^2} \mathbb{E}(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{4}{t^2} \frac{t^2\varepsilon}{12}.$$

$$M \geq M_2 \implies \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(|\bar{Y}_n| > t/2) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

18. Majoration de la probabilité pour la moyenne de X_k .

Si $M \geq \max(M_1, M_2)$, les deux majorations 16.b) et 17.e) sont simultanément valables. En les additionnant dans la question 15,

$$M \geq \max(M_1, M_2) \implies \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

19. Passage à la limite avec des choix successifs.

Fixons $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord un réel $M \geq \max(M_1, M_2)$, qui reste fixé. On choisit ensuite un entier $N \geq 1$ tel que $N \geq 12M^2/(t^2\varepsilon)$. Pour tout $n \geq N$, la question 18 donne

$$0 \leq \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Comme la précision est arbitraire,

$$\forall t > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) = 0, \quad \bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

20. Interprétation et retour sur l'expérience numérique.

La loi faible des grands nombres du cours affirme que, pour des variables indépendantes de même loi ayant une variance finie, leur moyenne converge en probabilité vers leur espérance. Les questions 11–19 montrent ici, pour des variables à densité, que l'existence d'une espérance suffit : aucune variance n'est nécessaire. Pour une espérance m éventuellement non nulle, on applique le résultat aux variables $X_k - m$, qui sont indépendantes, de même loi à densité, d'espérance 0 et d'espérance absolue finie. On obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) \quad \text{dès que cette espérance existe, dans le cadre à densité étudié.}$$

Dans la partie I, Z possède une densité, une espérance $\sqrt{2}$, et aucune variance. Le résultat s'applique donc à des copies indépendantes Z_k et justifie la conjecture de 8 : pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k - \sqrt{2} \right| \leq \eta \right) \rightarrow 1.$$

Les fréquences affichées par le programme estiment ces probabilités et sont donc compatibles avec le résultat démontré.