

HEC–ESSEC – Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2025

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Partie I – Autour de l'adjoint

Partie I – Images, noyaux et projection orthogonale

On pose $M = {}^tAA$. L'application $u : E \rightarrow F$ a pour matrice A dans des bases orthonormées. Le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(u)$ est noté π , et sa matrice Q .

Corrigé – Partie I.

1. Représentation d'une forme linéaire.

Posons $a_0 = \sum_{i=1}^p \ell(e_i)e_i$. Pour $x = \sum_i x_i e_i$, la linéarité et l'orthonormalité donnent $\ell(x) = \sum_i x_i \ell(e_i) = \langle a_0, x \rangle_E$. Si a et a' conviennent, $\langle a - a', x \rangle_E = 0$ pour tout x ; en choisissant $x = a - a'$, on obtient $\|a - a'\|^2 = 0$.

$$\exists! a_0 \in E, \quad \ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E, \quad a_0 = \sum_{i=1}^p \ell(e_i)e_i.$$

2. Existence et unicité de z_y .

Pour $y \in F$ fixé, $x \mapsto \langle u(x), y \rangle_F$ est une forme linéaire sur E . La question 1 lui est applicable :

$$\exists! z_y \in E, \quad \forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E.$$

3. Linéarité de l'adjoint.

Pour $y, y' \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a, pour tout x ,

$$\langle u(x), ay + by' \rangle_F = a \langle z_y, x \rangle_E + b \langle z_{y'}, x \rangle_E = \langle az_y + bz_{y'}, x \rangle_E.$$

Par l'unicité de la question 2, $z_{ay+by'} = az_y + bz_{y'}$.

$$u^* : y \mapsto z_y \text{ est linéaire,} \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E.$$

4. Matrice, rang et adjoint de l'adjoint.

Le coefficient à la ligne i , colonne j , de la matrice de u^* dans les bases du sujet vaut

$$\langle e_i, u^*(f_j) \rangle_E = \langle u(e_i), f_j \rangle_F = A_{j,i}.$$

Cette matrice est donc ${}^tA$. Une matrice et sa transposée ont même rang ; ainsi $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$. Enfin, par symétrie des produits scalaires, $\langle u^*(y), x \rangle_E = \langle y, u(x) \rangle_F$. L'unicité de l'adjoint donne

$$\text{Mat}(u^*) = {}^tA, \quad \text{rg}(u^*) = \text{rg}(u), \quad (u^*)^* = u.$$

5. Image de l'adjoint et orthogonal du noyau.

Pour $x \in \text{Ker } u$ et $y \in F$, $\langle x, u^*(y) \rangle_E = \langle u(x), y \rangle_F = 0$. Donc $\text{Im}(u^*) \subset (\text{Ker } u)^\perp$. Le théorème du rang et la question 4 donnent

$$\dim \text{Im}(u^*) = \text{rg}(u) = p - \dim \text{Ker } u = \dim(\text{Ker } u)^\perp.$$

L'inclusion entre deux espaces de même dimension est une égalité :

$$\boxed{\text{Im}(u^*) = (\text{Ker } u)^\perp.}$$

6. Noyau et image de $u^* \circ u$.

Si $u(x) = 0$, alors $u^*(u(x)) = 0$. Réciproquement, si $u^*(u(x)) = 0$, $\|u(x)\|^2 = \langle x, u^*(u(x)) \rangle_E = 0$, donc $u(x) = 0$. Le théorème du rang donne $\text{rg}(u^* \circ u) = \text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$. Comme $\text{Im}(u^* \circ u) \subset \text{Im}(u^*)$, les dimensions sont égales ; ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker } u, \quad \text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*).$$

7. Restriction à l'image de l'adjoint.

La question 6 montre que w prend ses valeurs dans $\text{Im}(u^*)$. Si $x \in \text{Im}(u^*)$ et $w(x) = 0$, alors $x \in (\text{Ker } u)^\perp \cap \text{Ker } u = \{0\}$ d'après les questions 5 et 6. L'endomorphisme w est injectif sur un espace de dimension finie, donc bijectif. Matriciellement,

$$\boxed{M = {}^tAA \text{ induit un isomorphisme de } \text{Im}({}^tA) \text{ sur } \text{Im}({}^tA).$$

En particulier, pour tout $b \in \text{Im}({}^tA)$, il existe un unique $X \in \text{Ker}(A)^\perp$ tel que $MX = b$, même si M n'est pas inversible sur tout $\mathbb{R}^p$.

8. Deux propriétés du projecteur Q .

a) Pour $y \in F$, $y - \pi(y) \in \text{Im}(u)^\perp$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\langle x, u^*(y - \pi(y)) \rangle_E = \langle u(x), y - \pi(y) \rangle_F = 0$. On obtient $u^* \circ \pi = u^*$, d'où

$$\boxed{{}^tAQ = {}^tA.}$$

b) Dans une base orthonormée adaptée à $F = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(u)^\perp$, la matrice de π est $\text{diag}(I_r, 0)$, où $r = \text{rg}(u)$. La trace est conservée par changement de base : pour des produits compatibles, $\text{Tr}(UV) = \sum_{i,j} u_{i,j} v_{j,i} = \text{Tr}(VU)$, ce qui donne $\text{Tr}(H^{-1}QH) = \text{Tr}(QHH^{-1}) = \text{Tr}(Q)$. Donc

$$\boxed{\text{Tr}(Q) = r = \text{rg}(u).}$$

9. Inversibilité de M .

Par la question 6, $\text{Ker } M = \text{Ker } A$. La matrice carrée M est inversible si et seulement si son noyau est nul. Le théorème du rang appliqué à $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ donne donc

$$\boxed{M \text{ inversible} \iff \text{Ker } A = \{0\} \iff \text{rg}(A) = p.}$$

10. Calcul du projecteur lorsque A est de rang p .

a) Posons $R = AM^{-1}A$. Puisque M est symétrique, M^{-1} l'est aussi, donc R est symétrique. On a $R^2 = AM^{-1}MM^{-1}A = R$ et $RA = A$. Ainsi $\text{Im } R = \text{Im } A$: une

inclusion vient de l'expression de R , l'autre de $RA = A$. Une matrice symétrique idempotente représente la projection orthogonale sur son image, car son image et son noyau sont orthogonaux. L'unicité du projecteur donne

$$Q = A({}^tAA)^{-1}{}^tA.$$

- b) La fonction teste le rang, puis applique a). On utilise ici `al.matrix_rank`, le nom de la fonction NumPy indiqué dans le formulaire de l'énoncé pour calculer le rang.

```
def Calcule_Q(A):
    n, p = np.shape(A)
    if al.matrix_rank(A) != p:
        return "Erreur : A n'est pas de rang p"
    At = np.transpose(A)
    M = np.dot(At, A)
    return np.dot(np.dot(A, al.inv(M)), At)
```

`Calcule_Q(A)` renvoie Q si $\text{rg}(A) = p$, et un message sinon.

Le test de rang est effectué avec la tolérance numérique de NumPy.

11. Positivité du produit quadratique.

La définition de M donne

$$\forall X, \quad {}^tXMX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 \geq 0.$$

Partie II – Minimisation d'une fonction quadratique

Partie II – Moindres carrés et erreur aléatoire

On pose $J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$ et $D(X) = MX - {}^tAY$.

Corrigé – Partie II.

12. Variation exacte de J_0 .

En développant le carré de $AX - Y + AH$,

$$\begin{aligned} J_0(X + H) - J_0(X) &= \langle AX - Y, AH \rangle + \frac{1}{2}\|AH\|^2 \\ &= \langle {}^tA(AX - Y), H \rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH. \end{aligned}$$

Ainsi

$$J_0(X + H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH.$$

13. Caractérisation des minima globaux.

Si $D(X) = 0$, la question 11 montre que la différence précédente est positive ou nulle pour tout H , donc X réalise un minimum global. Réciproquement, pour H fixé, la fonction réelle $g_H(t) = J_0(X + tH)$ est un polynôme en t et possède un minimum en 0 si X est un minimum de J_0 . Sa dérivée en 0 vaut $\langle D(X), H \rangle$ et doit être nulle. En choisissant $H = D(X)$, on obtient $\|D(X)\|^2 = 0$.

$$X \text{ réalise un minimum global de } J_0 \iff D(X) = 0, \quad S_0 = \{X : MX = {}^tAY\}.$$

14. Un unique minimum dans l'orthogonal du noyau.

Le vecteur ${}^tAY$ appartient à $\text{Im}({}^tA) = \text{Ker}(A)^\perp$. La question 7 assure qu'il admet un unique antécédent X_0 par la restriction de M à cet espace. Par la question 13,

$$S_0 \cap \text{Ker}(A)^\perp = \{X_0\}.$$

En particulier, S_0 est non vide, sans hypothèse de rang maximal sur A .

15. Description des solutions et norme minimale.

- a) Si $X \in S_0$, ${}^tA(AX - Y) = 0$. D'après la question 5 appliquée à l'adjoint, $\text{Ker}({}^tA) = \text{Im}(A)^\perp$; donc $Y - AX$ est orthogonal à $\text{Im} A$, tandis que $AX \in \text{Im} A$. C'est la caractérisation de la projection orthogonale :

$$AX = QY.$$

- b) Les deux solutions vérifient $MX = MX_0 = {}^tAY$, donc $X - X_0 \in \text{Ker} M = \text{Ker} A$. Comme $X_0 \in \text{Ker}(A)^\perp$, Pythagore donne $\|X\|^2 = \|X_0\|^2 + \|X - X_0\|^2$. Réciproquement, $X_0 + H \in S_0$ pour tout $H \in \text{Ker} A$.

$$S_0 = X_0 + \text{Ker} A, \quad X \in S_0, X \neq X_0 \implies \|X\| > \|X_0\|.$$

- c) Si $\text{rg}(A) = p$, la question 9 donne M inversible et l'équation normale possède une unique solution :

$$S_0 = \{M^{-1t}AY\}.$$

16. Erreur quadratique sous un bruit gaussien.

On suppose $\text{rg}(A) = p$, $Y = AU_0 + Z$, avec les coordonnées z_i indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- a) En remplaçant Y dans l'expression de X ,

$$X = M^{-1t}A(AU_0 + Z) = U_0 + M^{-1t}AZ.$$

Donc $A(X - U_0) = QZ$. Le projecteur orthogonal vérifie ${}^tQ = Q$ et $Q^2 = Q$, d'où

$$T = \|QZ\|^2 = {}^tZ{}^tQQZ = {}^tZQZ.$$

- b) On simule les n coordonnées indépendantes de Z , puis on applique Q . Dans toute cette question, le rang maximal de A est une hypothèse.

```
def simuleT(A, sigma):
    n, p = np.shape(A)
    Q = Calcule_Q(A)
    Z = rd.normal(0, sigma, n)
    W = np.dot(Q, Z)
    return np.dot(W, W)
```

`simuleT(A,sigma)` renvoie une simulation de T .

- c) On prend par exemple $N = 10000$ simulations indépendantes et on calcule leur moyenne. La loi faible des grands nombres justifie cette approximation, puisque l'existence de l'espérance sera vérifiée en f).

```
def esperanceT(A, sigma):
    N = 10000
    s = 0
    for k in range(N):
        s = s + simuleT(A, sigma)
    return s / N
```

`esperanceT(A,sigma)` approche $\mathbb{E}(T)$.

- d) Les matrices données ont respectivement 2, 3 et 5 colonnes linéairement indépendantes (les premiers blocs carrés sont triangulaires à diagonale non nulle). Pour $\sigma = 1$, les moyennes suggèrent $\mathbb{E}(T) = p$. Pour A_1 , les points du graphique sont proches de $2\sigma^2$, donc la conjecture commune est

$$\mathbb{E}(T) = p\sigma^2.$$

L'exemple A_1 a trois lignes, contrairement à l'hypothèse générale $n \geq 4$; tous les calculs de cette partie restent valables en dimension 3.

- e) La loi normale centrée possède des moments de tout ordre : les intégrales des puissances de $|t|$ contre sa densité convergent par les croissances comparées. La définition de la variance donne $\mathbb{E}(z_1^2) = \sigma^2$ et la symétrie de la densité donne $\mathbb{E}(z_1^3) = 0$. Pour calculer le quatrième moment lorsque $\sigma > 0$, notons f_σ la densité

normale ; elle vérifie $f'_\sigma(t) = -tf_\sigma(t)/\sigma^2$. Sur le segment $[-R, R]$, les fonctions $u(t) = t^3$ et $v(t) = -\sigma^2 f_\sigma(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'(t) = 3t^2$ et $v'(t) = tf_\sigma(t)$. L'intégration par parties donne

$$\int_{-R}^R t^4 f_\sigma(t) dt = [-\sigma^2 t^3 f_\sigma(t)]_{-R}^R + 3\sigma^2 \int_{-R}^R t^2 f_\sigma(t) dt.$$

Les termes de bord tendent vers 0 par les croissances comparées. En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $\mathbb{E}(z_1^4) = 3\sigma^2 \mathbb{E}(z_1^2) = 3\sigma^4$. Pour $\sigma = 0$, les coordonnées sont nulles et les mêmes formules valent.

$$\boxed{\mathbb{E}(z_1^2) = \sigma^2, \quad \mathbb{E}(z_1^3) = 0, \quad \mathbb{E}(z_1^4) = 3\sigma^4.}$$

- f) La symétrie de Q permet de séparer les termes diagonaux et les deux occurrences de chaque terme hors diagonale :

$$\boxed{T = T_1 + 2T_2, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n Q_{i,i} z_i^2, \quad T_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Q_{i,j} z_i z_j.}$$

Les moments calculés en e) assurent l'existence de l'espérance et du second moment de ces sommes finies. Pour $i \neq j$, l'indépendance donne $\mathbb{E}(z_i z_j) = \mathbb{E}(z_i) \mathbb{E}(z_j) = 0$. Donc $\mathbb{E}(T_2) = 0$ et $\mathbb{E}(T_1) = \sigma^2 \text{Tr}(Q) = p\sigma^2$.

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = p\sigma^2,}$$

ce qui vérifie les deux conjectures de d).

- g) Chaque terme du produit $T_1 T_2$ est proportionnel à $z_k^2 z_i z_j$ avec $i < j$. Si k diffère de i, j , l'indépendance donne $\mathbb{E}(z_k^2) \mathbb{E}(z_i) \mathbb{E}(z_j) = 0$. Si $k = i$, le produit des espérances est $\mathbb{E}(z_i^3) \mathbb{E}(z_j) = 0$; le cas $k = j$ est identique. En sommant ces termes finis,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1 T_2) = 0.}$$

- h) Posons $q = \sum_i Q_{i,i}^2$. L'indépendance et e) donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_1^2) &= 3\sigma^4 \sum_i Q_{i,i}^2 + 2\sigma^4 \sum_{i < j} Q_{i,i} Q_{j,j} \\ &= \sigma^4 (3q + (\text{Tr } Q)^2 - q). \end{aligned}$$

Pour le carré de T_2 , deux couples distincts $i < j$ et $k < \ell$ laissent au moins une coordonnée à la puissance 1 ; son espérance nulle et l'indépendance annulent le terme. Seuls les couples identiques subsistent, donc $\mathbb{E}(T_2^2) = \sigma^4 \sum_{i < j} Q_{i,j}^2$. Or, par symétrie et $Q^2 = Q$,

$$p = \text{Tr}(Q^2) = \sum_{i,j} Q_{i,j}^2 = q + 2 \sum_{i < j} Q_{i,j}^2.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1^2) = \sigma^4 (2q + p^2), \quad \mathbb{E}(T_2^2) = \frac{\sigma^4}{2} (p - q).}$$

i) D'après f), g), h),

$$\mathbb{E}(T^2) = \mathbb{E}(T_1^2) + 4\mathbb{E}(T_1T_2) + 4\mathbb{E}(T_2^2) = \sigma^4(p^2 + 2p).$$

La formule de König-Huygens donne

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = 2p\sigma^4.$$

Si $\sigma > 0$, l'événement demandé est contenu dans $[|T - \mathbb{E}(T)| > \alpha p \sigma^2]$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(T > (1 + \alpha)p\sigma^2) \leq \frac{2p\sigma^4}{\alpha^2 p^2 \sigma^4} = \frac{2}{p\alpha^2}.$$

Pour $\sigma = 0$, $T = 0$ et la probabilité de l'événement strict est 0, ce qui vérifie aussi l'inégalité.

Partie III – Une fonction non différentiable

Partie III – Condition de minimum et calcul d'une solution

On pose $J(X) = J_0(X) + \|BX\|$. L'ensemble $N(X)$ est celui défini dans l'énoncé : $W \in N(X)$ signifie qu'il existe $V \in \mathbb{R}^m$ avec $W = {}^tBV$, $\|V\| \leq 1$ et $\|BX\|V = BX$.

Corrigé – Partie III.

17. Variation de la norme dans une direction.

Pour $t \neq 0$, on rationalise le numérateur :

$$\frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\|u + tv\|^2 - \|u\|^2}{t(\|u + tv\| + \|u\|)} = \frac{2\langle u, v \rangle + t\|v\|^2}{\|u + tv\| + \|u\|}.$$

Comme $u \neq 0$, le dénominateur tend vers $2\|u\| > 0$; ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}.$$

18. Condition nécessaire lorsque $BX_0 \neq 0$.

Si X_0 est un minimum global, pour tout H la fonction réelle $t \mapsto J(X_0 + tH)$ possède un minimum en 0. La question 12 et la question 17 avec $u = BX_0$, $v = BH$ donnent sa dérivée en 0 :

$$0 = \langle D(X_0), H \rangle + \frac{\langle BX_0, BH \rangle}{\|BX_0\|} = \left\langle D(X_0) + {}^tB \frac{BX_0}{\|BX_0\|}, H \right\rangle.$$

L'identité pour tout H impose que le vecteur entre parenthèses soit nul. Le vecteur $V = BX_0/\|BX_0\|$ est de norme 1 et vérifie $\|BX_0\|V = BX_0$. Donc

$$-D(X_0) = {}^tB \frac{BX_0}{\|BX_0\|} \in N(X_0).$$

19. Condition nécessaire lorsque $BX_0 = 0$.

a) Pour tout H et $t < 0$, la minimalité et la question 12 donnent

$$0 \leq J(X_0 + tH) - J(X_0) = t\langle D(X_0), H \rangle + \frac{t^2}{2}\|AH\|^2 - t\|BH\|.$$

En divisant par $t < 0$, puis en faisant tendre t vers 0^- ,

$$\forall H, \quad \langle D(X_0), H \rangle \leq \|BH\|.$$

b) Pour $H \in \text{Ker } B$, la même inégalité appliquée à H et à $-H$ donne $\langle D(X_0), H \rangle = 0$.
D'où

$$D(X_0) \in \text{Ker}(B)^\perp.$$

c) La question 5, appliquée à l'application de matrice B , donne $\text{Ker}(B)^\perp = \text{Im}({}^tB)$;
ainsi

$$\exists W \in \mathbb{R}^m, \quad D(X_0) = {}^tBW.$$

- d) La question 6, appliquée à cette même application, donne $\text{Im}({}^tBB) = \text{Im}({}^tB)$. Les résultats de la partie I sont valables quelles que soient les dimensions respectives de ses espaces euclidiens. On obtient

$$\boxed{\exists V \in \mathbb{R}^p, \quad D(X_0) = {}^tBBV.}$$

- e) En choisissant $H = V$ dans a),

$$\|BV\|^2 = \langle {}^tBBV, V \rangle = \langle D(X_0), V \rangle \leq \|BV\|.$$

Comme $\|BV\| \geq 0$, cette inégalité impose $\|BV\| \leq 1$. Le vecteur $U = -BV \in \mathbb{R}^m$ vérifie $\|U\| \leq 1$, ${}^tBU = -D(X_0)$ et $\|BX_0\|U - BX_0 = 0$ car $BX_0 = 0$.

$$\boxed{\|BV\| \leq 1, \quad -D(X_0) \in N(X_0).}$$

20. Une inégalité de la norme.

- a) En développant les deux carrés,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2,$$

$$\left(\|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}.$$

Leur différence vaut donc

$$\boxed{\|u + v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}.$$

- b) Par Cauchy–Schwarz, le membre de droite est positif ou nul. En prenant les racines, il faut conserver la valeur absolue :

$$\|u + v\| \geq \left| \|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \right| \geq \|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}.$$

Ainsi, même lorsque la quantité entre barres est négative,

$$\boxed{\|u + v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}.$$

21. Une minoration de la variation de J .

- a) Écrivons $W = {}^tBV$ avec $\|V\| \leq 1$ et $\|BX_0\|V = BX_0$. Si $BX_0 \neq 0$, $V = BX_0/\|BX_0\|$. La question 20.b), avec $u = BX_0$, $v = B(X - X_0)$, donne

$$\|BX\| - \|BX_0\| \geq \langle V, B(X - X_0) \rangle = \langle W, X - X_0 \rangle.$$

Si $BX_0 = 0$, Cauchy–Schwarz donne la même conclusion, puisque $\langle V, BX \rangle \leq \|V\|\|BX\| \leq \|BX\|$.

$$\boxed{\|BX\| - \|BX_0\| \geq \langle W, X - X_0 \rangle.}$$

b) Avec $H = X - X_0$, on ajoute a) à la question 12 :

$$J(X) - J(X_0) \geq \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle + \frac{1}{2} \|A(X - X_0)\|^2.$$

Le dernier terme est positif ou nul ; donc

$$J(X) - J(X_0) \geq \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle.$$

22. Caractérisation complète des minima.

La nécessité résulte de la question 18 si $BX_0 \neq 0$ et de la question 19 si $BX_0 = 0$. Pour la réciproque, si $-D(X_0) \in N(X_0)$, on choisit $W = -D(X_0)$ en 21.b) : alors $J(X) - J(X_0) \geq 0$ pour tout X .

$$X_0 \text{ réalise un minimum global de } J \iff -D(X_0) \in N(X_0).$$

23. Résolution lorsque $A = I_n$ et B est diagonale.

On suppose $1 \leq k < n$, $B_{i,i} = \alpha_i \neq 0$ pour $i \leq k$ et $B_{i,i} = 0$ pour $i > k$. Alors $D(X) = X - Y$.

a) Pour $\lambda > 0$ et $a = \alpha_i^2 > 0$, $(\lambda + a)^2 - 4\lambda a = (\lambda - a)^2 \geq 0$. En divisant par les quantités strictement positives, $a/(\lambda + a)^2 \leq 1/(4\lambda)$. En multipliant par y_i^2 et en sommant,

$$F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^k y_i^2.$$

b) Si $\rho(Y) > 1$, F est continue sur $[0, +\infty[$, $F(0) = \rho(Y) - 1 > 0$ et $F(\lambda) \rightarrow -1$ en $+\infty$. Au moins un y_i est non nul, et

$$F'(\lambda) = -2 \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^3} < 0.$$

Le théorème de la bijection donne une unique racine $\lambda_0 > 0$. En appliquant a) à cette racine, $0 \leq -1 + (\sum_i y_i^2)/(4\lambda_0)$, donc

$$\exists! \lambda_0 > 0, \quad F(\lambda_0) = 0, \quad \lambda_0 \leq L := \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k y_i^2.$$

L'égalité avec L est possible ; la borne supérieure doit donc être incluse.

c) Les coordonnées de $X_0 = Y - BV$ sont

$$x_{0,i} = \frac{\beta y_i}{\beta + \alpha_i^2} \quad (i \leq k), \quad x_{0,i} = y_i \quad (i > k).$$

Comme B est symétrique, $D(X_0) = -BV = -{}^tBV$. On vérifie également, coordonnée par coordonnée, que $BX_0 = \beta V$. Si $\beta = 0$, alors $\|V\|^2 = \rho(Y) \leq 1$ et $BX_0 = 0$. Si $\beta > 0$, $F(\beta) = 0$ donne $\|V\|^2 = 1$, donc $\|BX_0\| = \beta$ et $\|BX_0\|V = BX_0$. Dans les deux cas, $-D(X_0) = {}^tBV \in N(X_0)$. La question 22 conclut :

$$X_0 = Y - BV \text{ réalise un minimum global de } J.$$

Ce minimum est unique : la minoration conservant le terme quadratique en 21.b) donne ici $J(X) - J(X_0) \geq \frac{1}{2} \|X - X_0\|^2$.

d) Les tableaux sont indexés à partir de 0 ; $\alpha[i]$ et $Y[i]$ représentent donc α_{i+1} et y_{i+1} .

i) On additionne les k termes de F :

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    s = -1
    for i in range(len(alpha)):
        a = alpha[i] ** 2
        s = s + a * Y[i] ** 2 / (lda + a) ** 2
    return s
```

$$\text{FoncSom}(\alpha, Y, \text{lda}) = F(\lambda).$$

ii) Si $F(0) \leq 0$, alors $\rho(Y) \leq 1$ et $\beta = 0$. Sinon, on part de $[0, L]$, avec $F(0) > 0$ et $F(L) \leq 0$; la racine appartient à cet intervalle. À chaque étape on conserve le sous-intervalle qui contient la racine. On renvoie le milieu dès que la largeur est au plus 2ε .

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
    if FoncSom(alpha, Y, 0) <= 0:
        return 0
    a = 0
    b = 0
    for i in range(len(alpha)):
        b = b + Y[i] ** 2 / 4
    while b - a > 2 * epsilon:
        c = (a + b) / 2
        if c == a or c == b:
            return c
        if FoncSom(alpha, Y, c) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a + b) / 2
```

En arithmétique exacte, la largeur est divisée par 2 à chaque étape ; la boucle termine puisque $\varepsilon > 0$ et

$$|\beta_a - \beta| \leq \varepsilon.$$

Le test supplémentaire sur le milieu évite une stagnation en arithmétique flottante. Si la tolérance demandée est inférieure à la résolution des flottants, la précision effectivement obtenue reste limitée par cette résolution.

iii) On applique la formule explicite de c) avec le paramètre obtenu. Les dernières coordonnées de Y sont conservées.

```
def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
    beta = CalcBeta(alpha, Y, epsilon)
    X = np.zeros(len(Y))
    for i in range(len(Y)):
        X[i] = Y[i]
    for i in range(len(alpha)):
        X[i] = beta * Y[i] / (beta + alpha[i] ** 2)
    return X
```

$$\text{CalcSolution}(\alpha, Y, \text{epsilon}) \text{ renvoie une approximation de } X_0.$$

Lorsque $\rho(Y) \leq 1$, le paramètre $\beta = 0$ est exact. Sinon, la garantie ε porte sur β ; elle ne donne pas à elle seule une erreur de norme inférieure à ε sur X_0 .