Ecricome

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2026

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Intégrales exponentielles et approximation

Exercice 1 – Calcul d'une intégrale et méthodes numériques

Pour $a > 0$, on étudie $G(a) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-at})/t \,\mathrm{d}t$, puis l'intégrale de $(u-1)/\ln u$ sur $]0,1[$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Convergence de deux intégrales.

a) La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne $(1-\mathrm{e}^{-t})/t \to 1$ lorsque $t \to 0^+$. La fonction se prolonge donc continûment en 0 et est continue sur $]0,1]$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b) Pour $t \geq 1$, $0 \leq \mathrm{e}^{-t}/t \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1}$. La comparaison des intégrales positives donne

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Nature de l'intégrale définissant G.

a) Pour $a > 0$, en utilisant la dérivabilité de l'exponentielle en 0,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-at}-1}{t} \longrightarrow -1+a.$$

Il n'y a donc pas de difficulté en 0. Pour $t \geq 1$,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\right| \leq \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-at},$$

dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ converge, puisque $a > 0$.

$$\boxed{G(a) \text{ existe pour tout } a > 0.}$$

b) Pour $a \leq 0$, $\mathrm{e}^{-at} \geq 1$ et, pour $t \geq 1$,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t} \leq -\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{t}.$$

L'intégrale de $1/t$ diverge en $+\infty$. Le quotient a une limite finie $a-1$ en 0 ; la difficulté est donc uniquement à l'infini.

$$\boxed{a \leq 0 \implies \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge vers } -\infty.}$$

3. Calcul de $G(a)$.

a) Posons $F(t) = (1-\mathrm{e}^{-t})/t$ pour $t>0$, prolongée par $F(0)=1$. Pour $0<\varepsilon<x$, on effectue dans le premier terme le changement $u=at$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $[\varepsilon, x]$ sur $[a\varepsilon, ax]$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{a\varepsilon}^{ax} F(u)\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^x F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{ax} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{a\varepsilon} F(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La dernière intégrale tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0^+$, car F est bornée au voisinage de 0 et la longueur de l'intervalle tend vers 0. En séparant $F(t) = 1/t - \mathrm{e}^{-t}/t$ sur le segment entre x et ax,

$$\boxed{\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln a - \int_x^{ax} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

Les intégrales sont orientées lorsque $a<1$; l'identité reste valable.

b) Posons $m_x = \min(x, ax)$ et $M_x = \max(x, ax)$. Comme $a>0$, $m_x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Pour $m_x \geq 1$, la question 1.b) permet de majorer

$$\left|\int_x^{ax} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{m_x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0.$$

En passant à la limite dans a),

$$\boxed{G(a) = \ln a \quad (a>0).}$$

4. Intégrale de $(u-1)/\ln u$.

Le changement $u = \mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant et bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$; sa dérivée $-\mathrm{e}^{-t}$ ne s'annule pas. Pour $0<\varepsilon<R$,

$$\int_{\mathrm{e}^{-R}}^{\mathrm{e}^{-\varepsilon}} \frac{u-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Les intégrales impropres obtenues ont la même nature par ce changement bijectif, et la seconde converge d'après la question 2.a) avec $a=2$. Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 \frac{u-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u = G(2) = \ln 2.}$$

5. Sommes de Riemann et simulation.

a) La fonction φ est continue sur $[0,1]$; les sommes associées à la subdivision régulière et aux extrémités gauches vérifient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k/n) = \int_0^1 \varphi(u)\,\mathrm{d}u.}$$

b) Le terme $k = 0$ vaut $f(0) = 0$; pour $1 \leq k \leq n-1$, $k/n \in]0,1[$ et on peut utiliser le quotient :

```
def Rect(n):
    s = 0
    for k in range(1, n):
        u = k / n
        s = s + (u - 1) / np.log(u)
    return s / n
```

Pour $n = 1$, la somme est vide et le résultat vaut 0, comme demandé.

$$\boxed{\texttt{Rect(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \longrightarrow \ln 2.}$$

c) Les composantes de `U` sont n réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0,1]$. Le programme calcule $f(U_k)$ avec le traitement prévu pour les extrémités, puis renvoie la moyenne :

$$\boxed{\texttt{prog(n)} \text{ renvoie } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k).}$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc bornée. Par le théorème de transfert appliqué uniquement au calcul de l'espérance, $\mathbb{E}(f(U_k)) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \ln 2$ et la variance existe. La loi faible des grands nombres donne la convergence en probabilité de cette moyenne vers $\ln 2$; elle fournit une approximation aléatoire de l'intégrale.

d) Sur la figure fournie, la suite en pointillés, correspondant à `Rect`, se rapproche plus régulièrement de $\ln 2 \simeq 0{,}6931$. La suite aléatoire en trait plein présente des fluctuations plus fortes.

$$\boxed{\text{Sur cette figure, la méthode des rectangles donne la meilleure approximation.}}$$

Ce constat graphique ne garantit pas une comparaison pour chaque tirage aléatoire.

Exercice 2 – Un endomorphisme de polynômes

Exercice 2 – Réduction et polynômes orthogonaux

Pour $n \geq 2$, on étudie sur $\mathbb{R}_n[x]$ l'application $\varphi(P) = (x^2-1)P'' + 5xP'$ et ses polynômes propres unitaires G_k. Le produit scalaire utilise le poids $(1-t^2)^{3/2}$ sur $[-1,1]$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Un exemple de matrice de taille 3.

a) La matrice A est triangulaire ; ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On peut aussi vérifier directement que e_1, e_2 et $(-1/6, 0, 1)$ sont des vecteurs propres associés respectivement à 0, 5 et 12 :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 5, 12\}.}$$

b) La matrice possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3. Les trois vecteurs propres précédents sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

c) En rangeant ces vecteurs dans l'ordre croissant des valeurs propres,

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(0,5,12), \quad A = VDV^{-1}.}$$

La matrice V est inversible car ses colonnes forment une base, et $AV = VD$ vérifie la relation sans qu'il soit nécessaire de calculer V^{-1}.

2. Action de φ sur les monômes.

a) Pour $P_0 = 1$, les dérivées sont nulles ; pour $P_1 = x$, $P_1' = 1$ et $P_1'' = 0$. Pour $k \geq 2$, $P_k' = kx^{k-1}$ et $P_k'' = k(k-1)x^{k-2}$. Donc

$$\boxed{\varphi(P_0) = 0, \quad \varphi(P_1) = 5x, \quad \varphi(P_k) = k(k+4)x^k - k(k-1)x^{k-2} \ (k \geq 2).}$$

b) Si P est unitaire de degré $d \geq 1$, le terme de degré d de $\varphi(P)$ vaut $d(d+4)x^d$; les termes de degré inférieur de P ne peuvent pas contribuer à ce coefficient. Ainsi

$$\boxed{d \geq 1 : \quad \deg \varphi(P) = d, \quad \text{coefficient dominant de } \varphi(P) = d(d+4).}$$

Pour $d = 0$, le seul polynôme unitaire est 1 et $\varphi(1) = 0$. Le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant ; son degré n'est pas un entier naturel. Il faut donc traiter ce cas séparément :

$$\boxed{d = 0 : \quad P = 1, \quad \varphi(P) = 0.}$$

3. Endomorphisme, matrice et sous-espaces stables.

a) La dérivation et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires. La question 2 montre que l'image de chaque monôme de degré au plus n est de degré au plus n. Par linéarité,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$$

b) En indexant les lignes et colonnes de 0 à n, la colonne j est donnée par les coefficients de $\varphi(P_j)$. Donc la matrice $B = (b_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ est définie par

$$\boxed{b_{i,j} = \begin{cases} j(j+4), & i = j, \\ -j(j-1), & i = j-2 \text{ et } j \ge 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Elle est triangulaire supérieure, de diagonale $0, 5, 12, 21, \dots, n(n+4)$.

c) Si $P \in \mathbb{R}_k[x]$, les mêmes calculs donnent $\deg \varphi(P) \le k$ lorsque l'image n'est pas nulle. D'où

$$\boxed{\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \varphi(\mathbb{R}_k[x]) \subset \mathbb{R}_k[x].}$$

d) Pour $k = 2$, les images sont 0, $5x$ et $12x^2 - 2$; ainsi

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,x,x^2)}(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = A.}$$

4. Valeurs propres et polynômes G_k.

a) La matrice de la question 3.b) est triangulaire supérieure. Ses coefficients diagonaux donnent

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k(k+4) : 0 \le k \le n\}.}$$

b) La fonction $g(x) = x(x+4)$ a pour dérivée $g'(x) = 2x + 4 > 0$ sur $[0, +\infty[$. Elle est strictement croissante, donc

$$\boxed{0 < 5 < 12 < \cdots < n(n+4) : n+1 \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

c) L'espace $\mathbb{R}_n[x]$ a pour dimension $n+1$, et φ possède $n+1$ valeurs propres distinctes. Par conséquent

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable, et chacun de ses espaces propres est de dimension 1.}}$$

d) Fixons k. Un polynôme propre non nul P possède un coefficient dominant $a \neq 0$; P/a est propre et unitaire. L'espace propre étant une droite, deux polynômes propres unitaires y sont proportionnels, et la comparaison de leurs coefficients dominants impose un facteur 1.

$$\boxed{\exists! G_k \text{ unitaire}, \quad E_{k(k+4)}(\varphi) = \mathrm{Vect}(G_k).}$$

e) Les polynômes 1 et x sont unitaires et vérifient $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 5x$. L'unicité donne

$$\boxed{G_0 = 1, \qquad G_1 = x.}$$

f) Un calcul direct donne $\varphi(x^2 - 1/6) = 12x^2 - 2 = 12(x^2 - 1/6)$. Le polynôme est unitaire, donc

$$\boxed{G_2 = x^2 - \frac{1}{6}.}$$

g) Si $\deg G_k = d \geq 1$, la question 2.b), appliquée à $\varphi(G_k) = k(k+4)G_k$, donne $d(d+4) = k(k+4)$. La stricte croissance établie en b) impose $d = k$. Si $d = 0$, $\varphi(G_k) = 0$ impose $k = 0$, et $G_0 = 1$ est bien de degré 0.

$$\boxed{\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \deg G_k = k.}$$

5. Parité des polynômes propres.

a) Pour $Q(x) = P(-x)$, la dérivation de fonctions d'une variable donne

$$\boxed{Q'(x) = -P'(-x), \qquad Q''(x) = P''(-x).}$$

b) Le polynôme Q est non nul puisque P l'est, et

$$\begin{aligned}\varphi(Q)(x) &= (x^2-1)P''(-x) - 5xP'(-x)\\ &= \varphi(P)(-x) = k(k+4)P(-x) = k(k+4)Q(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{Q \in E_{k(k+4)}(\varphi) \setminus \{0\}.}$$

c) Le polynôme $(-1)^k G_k(-x)$ est unitaire de degré k et appartient au même espace propre que G_k. Par unicité,

$$\boxed{G_k(-x) = (-1)^k G_k(x) : G_k \text{ est pair si } k \text{ est pair, impair sinon.}}$$

6. Le produit scalaire pondéré.

Pour tous polynômes P, Q, le produit $P(t)Q(t)(1-t^2)^{3/2}$ est continu sur le segment $[-1,1]$; son intégrale existe. La bilinéarité découle de celle de l'intégrale et la symétrie de $PQ = QP$. De plus, $\langle P, P\rangle \geq 0$. Si $P \neq 0$, il existe $t_0 \in]-1,1[$ avec $P(t_0) \neq 0$, car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Par continuité, sur un petit segment autour de t_0, $P(t)^2(1-t^2)^{3/2}$ est strictement positive et minorée par un réel strictement positif. Son intégrale est donc strictement positive.

$$\boxed{\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[x].}$$

7. Norme de G_0.

a) La fonction $s \mapsto \sin s$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1,1]$. On peut donc l'utiliser comme changement de variable dans cette intégrale sur un segment. Sur cet intervalle, $\cos s \geq 0$, d'où $(1-\sin^2 s)^{3/2} = \cos^3 s$ et $\mathrm{d}t = \cos s\,\mathrm{d}s$:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 s\,\mathrm{d}s.}$$

b) Avec $\cos^2 s = (1+\cos 2s)/2$,

$$\cos^4 s = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2s + \cos^2 2s) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2s + \frac{1+\cos 4s}{2}\right).$$

Ainsi

$$\boxed{\cos^4 s = \frac{1}{8}(\cos 4s + 4\cos 2s + 3).}$$

c) Comme $G_0 = 1$, on intègre l'expression précédente :

$$\|G_0\|^2 = \left[\frac{\sin 4s}{32} + \frac{\sin 2s}{4} + \frac{3s}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}.$$

Les sinus aux bornes sont nuls. Donc

$$\boxed{\|G_0\|^2 = \frac{3\pi}{8}.}$$

8. Symétrie de φ et orthogonalité des G_k.

a) Sur $]-1,1[$, la règle de dérivation du produit donne

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P'(t)(1-t^2)^{5/2}\right) &= P''(t)(1-t^2)^{5/2} - 5tP'(t)(1-t^2)^{3/2} \\ &= -\varphi(P)(t)(1-t^2)^{3/2}.\end{aligned}$$

La fonction et sa dérivée se prolongent continûment aux extrémités (la dérivée y vaut 0). Par conséquent

$$\boxed{\left(P'(t)(1-t^2)^{5/2}\right)' = -\varphi(P)(t)(1-t^2)^{3/2} \quad (-1 \leq t \leq 1),}$$

avec des dérivées unilatérales aux extrémités.

b) Posons $u(t) = Q(t)$ et $v(t) = P'(t)(1-t^2)^{5/2}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, avec $u' = Q'$ et $v' = -\varphi(P)(1-t^2)^{3/2}$. L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q\rangle &= -\int_{-1}^{1} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -[u(t)v(t)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le terme de bord est nul puisque $v(-1) = v(1) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)(1-t^2)^{5/2}\,\mathrm{d}t.}$$

c) La dernière expression est symétrique en P, Q. On a donc $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$, soit

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

d) Pour $i \neq j$, en utilisant les deux valeurs propres distinctes,

$$i(i+4)\langle G_i, G_j\rangle = \langle \varphi(G_i), G_j\rangle = \langle G_i, \varphi(G_j)\rangle = j(j+4)\langle G_i, G_j\rangle.$$

Il s'ensuit $\langle G_i, G_j\rangle = 0$. Les $G_0, \ldots, G_k$ sont de degrés respectifs $0, \ldots, k$ et non nuls ; ils forment une famille libre de $k+1$ éléments de $\mathbb{R}_k[x]$, donc

$$\boxed{(G_0, \ldots, G_k) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_k[x].}$$

e) Tout élément de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ est une combinaison de $G_0, \ldots, G_{k-1}$. Par bilinéarité et d),

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{k-1}[x], \quad \langle G_k, P\rangle = 0.}$$

9. Une relation de récurrence à trois termes.

a) Les produits PQ et QR peuvent dépasser le degré n. L'identité demandée s'entend en leur appliquant la même formule intégrale, qui a un sens pour tous les polynômes. L'associativité du produit donne

$$\boxed{\langle PQ, R\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)R(t)(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \langle P, QR\rangle.}$$

b) Si $P \neq 0$ a pour degré d, la base de la question 8.d) permet l'écriture unique $P = \sum_{i=0}^{d} a_i G_i$. En prenant le produit scalaire avec G_j, les termes $i \neq j$ disparaissent : $\langle P, G_j\rangle = a_j \|G_j\|^2$, avec $\|G_j\|^2 > 0$. Donc

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{d} \frac{\langle P, G_i\rangle}{\|G_i\|^2} G_i.}$$

Pour $P = 0$, tous les coefficients sont nuls.

c) Pour $1 \leq k \leq n-1$, $xG_k \in \mathbb{R}_{k+1}[x]$. Si $0 \leq i \leq k-2$, alors $xG_i \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$; les questions 8.e) et a) donnent

$$\langle xG_k, G_i\rangle = \langle G_k, xG_i\rangle = 0.$$

L'écriture de b) ne conserve donc que les trois derniers termes. Comme ces trois polynômes sont linéairement indépendants,

$$\boxed{\exists!(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{R}^3, \quad xG_k = \alpha_k G_{k+1} + \beta_k G_k + \gamma_k G_{k-1}.}$$

Pour $k = 1$, il n'y a aucun indice $i \leq k-2$ et l'écriture dans (G_0, G_1, G_2) donne directement ce résultat.

d) Le coefficient dominant de xG_k vaut 1 ; seul G_{k+1} a le même degré $k+1$ dans le membre de droite. Donc $\alpha_k = 1$. Le polynôme $xG_k - G_{k+1} - \gamma_k G_{k-1}$ a la parité de $k+1$, alors que G_k a la parité opposée. L'égalité à $\beta_k G_k$ impose donc $\beta_k = 0$, puisque $G_k \neq 0$. En utilisant la valeur de γ_k admise dans l'énoncé,

$$\boxed{G_{k+1} = xG_k - \frac{k(k+3)}{4(k+2)(k+1)} G_{k-1}.}$$

e) Pour $n \geq 3$, on utilise $k = 2$ et $\gamma_2 = 5/24$:

$$G_3 = x\left(x^2 - \frac{1}{6}\right) - \frac{5}{24}x = x^3 - \left(\frac{4}{24} + \frac{5}{24}\right)x.$$

Ainsi

$$\boxed{G_3 = x^3 - \frac{3}{8}x.}$$

Si $n = 2$, G_3 n'appartient pas à $\mathbb{R}_n[x]$; la question nécessite $n \geq 3$, ou l'étude de la même application sur $\mathbb{R}_3[x]$.

10. Calcul des polynômes en Python.

a) Précision nécessaire. Si P est de degré n, alors xP a pour degré $n+1$ et ne peut pas être représenté par un tableau de taille $n+1$. La fonction proposée dans

l'énoncé représente donc exactement xP sous la condition $\deg P \leq n-1$, qui est satisfaite lors de son utilisation en b). On décale chaque coefficient d'un rang :

```
def Prod(P, n):
    Q = np.zeros(n + 1)
    for k in range(n):
        Q[k + 1] = P[k]
    return Q
```

$$\boxed{\deg P \leq n-1 \implies \texttt{Prod(P,n)} \text{ représente } xP.}$$

Si P est de degré n, le tableau renvoyé omettrait le coefficient non nul de degré $n+1$; ce ne serait pas le produit exact.

b) On suppose $0 \leq k \leq n$. On initialise $G_0 = 1$, $G_1 = x$, puis on utilise la relation de la question 9.d). À l'étape j, `H` représente G_{j-1} et `G` représente G_j :

```
def VP(n, k):
    H = np.zeros(n + 1)
    H[0] = 1
    if k == 0:
        return H
    G = np.zeros(n + 1)
    G[1] = 1
    for j in range(1, k):
        gamma = j * (j + 3) / (4 * (j + 2) * (j + 1))
        Q = Prod(G, n) - gamma * H
        H = G
        G = Q
    return G
```

Dans la boucle, $j \leq k-1 \leq n-1$, donc `Prod` est bien appliquée à un polynôme de degré au plus $n-1$. Pour $k = 1$, la boucle est vide.

$$\boxed{\texttt{VP(n,k)} \text{ renvoie les coefficients de } G_k \quad (0 \leq k \leq n).}$$

Problème – Temps d'attente et dépassement d'un seuil

Problème – Lancers discrets puis variables uniformes à densité

On calcule d'abord le temps nécessaire à l'obtention de r zéros consécutifs, puis le premier rang où une somme atteint d. Le dernier modèle remplace les lancers du dé par des variables indépendantes uniformes sur $[0, d]$.

Corrigé – Problème.

Partie I – Une suite de zéros consécutifs

1. Sommes finies et premier résultat non nul.

a) Pour $0 < x < 1$, la somme géométrique finie donne

$$\boxed{\sum_{k=1}^{r} x^k = x\frac{1-x^r}{1-x}.}$$

b) On peut dériver l'identité précédente, qui porte sur une somme finie de fonctions dérivables. En posant $F(x) = (x - x^{r+1})/(1-x)$,

$$F'(x) = \frac{(1-(r+1)x^r)(1-x) + (x-x^{r+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\boxed{(1-x)^2 \sum_{k=1}^{r} kx^{k-1} = 1-(r+1)x^r + rx^{r+1},}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{r} kx^{k-1} = \frac{1-(r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}.}$$

c) À chaque lancer, la probabilité d'une face non nulle vaut $p = d/(d+1)$; les lancers sont indépendants. Y est le rang du premier succès, donc suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{d}{d+1}\right), \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{d+1}{d}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{d+1}{d^2}.}$$

Sa probabilité est $\mathbb{P}(Y = i) = (1-p)^{i-1}p$, pour $i \geq 1$.

d) $[Y > r]$ signifie que les r premiers lancers sont tous nuls. Par indépendance,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y > r) = \left(\frac{1}{d+1}\right)^r.}$$

2. Espérances conditionnelles de X.

L'existence de l'espérance de X est admise par le sujet.

a) Sur $[Y > r]$, les r premiers lancers sont nuls : le premier bloc de r zéros se termine exactement au rang r. Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X \mid [Y > r]) = r.}$$

b) Sur $[Y = i]$, pour $1 \leq i \leq r$, il y a $i - 1 < r$ zéros puis une valeur non nulle. Aucun bloc de r zéros n'a encore été obtenu. Le résultat non nul au rang i empêche tout bloc de traverser ce rang. Les lancers suivants sont indépendants des i premiers et ont la même loi. Le nombre de lancers supplémentaires nécessaires a donc la même loi que X.

$$\boxed{\mathbb{E}(X \mid [Y = i]) = i + \mathbb{E}(X) \quad (1 \leq i \leq r).}$$

3. Calcul de $\mathbb{E}(X)$.

a) Les événements $[Y = 1], \ldots, [Y = r], [Y > r]$ forment un système complet fini. La formule de l'espérance totale, avec la question 2, donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(Y = i)(i + \mathbb{E}(X)) + r\mathbb{P}(Y > r) \\ &= \sum_{i=1}^{r} i\mathbb{P}(Y = i) + \mathbb{E}(X)(1 - \mathbb{P}(Y > r)) + r\mathbb{P}(Y > r).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} i\mathbb{P}(Y = i) + \mathbb{E}(X)(1 - \mathbb{P}(Y > r)) + r\mathbb{P}(Y > r).}$$

b) Posons $q = 1/(d+1)$ et $p = 1 - q = d/(d+1)$. L'identité précédente donne

$$\begin{aligned}q^r\mathbb{E}(X) &= p\sum_{i=1}^{r} iq^{i-1} + rq^r \\ &= \frac{1 - (r+1)q^r + rq^{r+1}}{p} + rq^r = \frac{1 - q^r}{p}.\end{aligned}$$

Comme $p, q > 0$, on peut diviser et obtenir

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{q^{-r} - 1}{p} = \frac{(d+1)^{r+1} - d - 1}{d}.}$$

Partie II – Somme des résultats d'un dé

4. Loi et espérance de U_n.

L'équiprobabilité des faces donne $\mathbb{P}(U_n = j) = 1/(d+1)$ pour $j = 0, \ldots, d$. La variable est bornée, donc son espérance existe, et

$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{d+1}\sum_{j=0}^{d} j = \frac{1}{d+1}\frac{d(d+1)}{2}.$$

$$\boxed{U_n \sim \mathcal{U}(\{0, \ldots, d\}), \qquad \mathbb{E}(U_n) = \frac{d}{2}.}$$

5. Loi de la somme de deux lancers.

a) Chaque entier de 0 à $2d$ peut s'écrire comme la somme de deux entiers de 0 à d, et chaque couple a une probabilité non nulle.

$$\boxed{S_2(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 2d\}.}$$

b) Le système $([U_1 = i])_{i=0,\dots,d}$ est complet. La formule des probabilités totales et l'indépendance donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2 = k) &= \sum_{i=0}^{d} \mathbb{P}(U_1 = i)\mathbb{P}(S_2 = k \mid U_1 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \mathbb{P}(U_1 = i)\mathbb{P}(U_2 = k - i).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^{d} \mathbb{P}(U_1 = i)\mathbb{P}(U_2 = k - i).}$$

c) Les termes non nuls correspondent à $\max(0, k-d) \leq i \leq \min(d, k)$ et valent tous $1/(d+1)^2$. Pour $0 \leq k < d$, il y en a $k+1$; pour $d \leq k \leq 2d$, il y en a $d - (k-d) + 1 = 2d + 1 - k$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(S_2 = k) = \begin{cases} (k+1)/(d+1)^2, & 0 \leq k < d, \\ (2d+1-k)/(d+1)^2, & d \leq k \leq 2d. \end{cases}}$$

d) En sommant la seconde expression,

$$\mathbb{P}(S_2 \geq d) = \frac{1}{(d+1)^2} \sum_{k=d}^{2d} (2d+1-k) = \frac{1}{(d+1)^2} \sum_{j=1}^{d+1} j.$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(S_2 \geq d) = \frac{d+2}{2(d+1)}.}$$

6. Simulation du temps d'atteinte T.

a) On part de $S_0 = 0$ et on ajoute les résultats des lancers jusqu'à ce que la somme atteigne ou dépasse d :

```
def Atteinte(d):
    S = 0
    n = 0
    while S < d:
        S = S + rd.randint(0, d + 1)
        n = n + 1
    return n
```

La fonction `rd.randint(0,d+1)` tire exactement une face de 0 à d. Puisque $d \geq 2$, au moins un lancer est effectué.

`Atteinte(d)` renvoie une simulation de T.

b) On effectue N simulations indépendantes et on calcule leur moyenne :

```
def EspT(d, N):
    E = 0
    for k in range(N):
        E = E + Atteinte(d)
    return E / N
```

L'espérance de T est admise à cette question. La loi faible des grands nombres justifie que cette moyenne converge en probabilité vers $\mathbb{E}(T)$ quand $N \to +\infty$.

`EspT(d,N)` approche $\mathbb{E}(T)$ par la loi faible des grands nombres.

c) La figure suggère que l'espérance se rapproche de la droite horizontale de hauteur e lorsque d augmente :

$$\boxed{\text{Conjecture : } \lim_{d\to+\infty} \mathbb{E}(T) = \mathrm{e}.}$$

7. Espérance d'une variable à valeurs entières positives ou nulles.

On suppose $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(V \geq n)$ convergente.

a) Pour $1 \leq n \leq N$, $\mathbb{P}(V \geq n) = \sum_{i=n}^{N} \mathbb{P}(V = i) + \mathbb{P}(V \geq N+1)$. En sommant ces égalités finies, le terme $\mathbb{P}(V = i)$ apparaît i fois :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(V \geq n) = \sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}(V = i) + N\mathbb{P}(V \geq N+1).}$$

b) Le dernier terme est positif, donc les sommes partielles $\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}(V = i)$ sont majorées par la somme finie de la série supposée convergente. Elles sont croissantes et convergent par le théorème de la limite monotone. Pour une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela donne l'existence de son espérance :

$$\boxed{\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(V = i) < +\infty.}$$

c) Pour $i \geq N+1$, $N \leq i$; ainsi

$$0 \leq N\mathbb{P}(V \geq N+1) = N \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(V = i) \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} i\mathbb{P}(V = i).$$

Le dernier membre est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} N\mathbb{P}(V \geq N+1) = 0.}$$

d) En passant à la limite dans a), grâce à b) et c),

$$\boxed{\mathbb{E}(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V \geq n).}$$

8. Calcul exact de l'espérance du temps d'atteinte.

a) La fonction $h(t) = r!(1-t)^{-r-1}$ est la restriction à $[0, 1/2]$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$. Une récurrence sur k donne : la formule est vraie pour $k = 0$ et la dérivée du membre de droite au rang k est celui au rang $k+1$. Ainsi

$$\boxed{h^{(k)}(t) = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}} \quad (k \in \mathbb{N},\ 0 \leq t \leq 1/2).}$$

b) Pour $0 \leq t \leq x \leq 1/2$, on a $1 - t \geq 1/2$ et $(x-t)^{n-1} \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}}\,\mathrm{d}t &\leq 2^{r+n+1} \int_0^x (x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2^{r+n+1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leq 2^{r+n+1}\frac{x^n}{n}.}$$

c) Fixons $0 \leq x < 1/2$. La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée sur le segment $[0,x]$, donne pour $n \geq 1$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}h^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le coefficient $h^{(k)}(0)/k! = (r+k)!/k!$ vaut $(k+r)\cdots(k+1)$, avec la convention du produit vide égal à 1 lorsque $r=0$. Le reste $R_n(x)$ vérifie, grâce à b),

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(r+n)!}{(n-1)!}\,2^{r+n+1}\frac{x^n}{n} = 2^{r+1}\frac{(r+n)!}{n!}(2x)^n.$$

Pour r fixé, $(r+n)!/n! = (n+1)\cdots(n+r)$ est un polynôme en n de degré r (et vaut 1 pour $r=0$). Si $0 < x < 1/2$, les croissances comparées montrent que ce polynôme multiplié par $(2x)^n$ tend vers 0 ; pour $x=0$, le reste est nul. Les sommes partielles convergent donc et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)\cdots(k+1)x^k = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \quad (0 \leq x < 1/2).}$$

On a obtenu cette identité à partir d'une formule de Taylor finie et d'un contrôle de son reste, sans invoquer de résultat général sur les séries de fonctions.

d) La formule admise pour T donne, en posant $m = n-1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T \geq n) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\binom{m+d-1}{m}\left(\frac{1}{d+1}\right)^m \\ &= \frac{1}{(d-1)!}\sum_{m=0}^{+\infty}(m+d-1)\cdots(m+1)\left(\frac{1}{d+1}\right)^m.\end{aligned}$$

Comme $d \geq 2$, $x = 1/(d+1) < 1/2$. La question c), avec $r = d-1$, assure la convergence et donne pour somme $(1-1/(d+1))^{-d}$. La question 7 s'applique à T, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \left(\frac{d+1}{d}\right)^d.}$$

La formule admise montre aussi que $\mathbb{P}(T \geq n) \to 0$: pour d fixé, son expression est un polynôme en n multiplié par une puissance géométrique de raison $1/(d+1) < 1$. Cela confirme que le seuil est atteint avec probabilité 1.

e) La dérivabilité de ln en 1 donne $\ln(1+u)/u \to 1$ pour $u \to 0$. Ainsi

$$\ln \mathbb{E}(T) = d\ln(1+1/d) \longrightarrow 1.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{d\to+\infty}\mathbb{E}(T) = \mathrm{e}.}$$

Partie III – Somme de variables uniformes à densité

On suppose désormais $d > 0$ réel et les U_n indépendantes, uniformes sur $[0, d]$.

9. Densités de S_1 et S_2.

a) Une densité de $S_1 = U_1$ et ses moments sont

$$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} 1/d, & 0 \le x \le d, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \qquad \mathbb{E}(S_1) = \frac{d}{2}, \quad \mathbb{V}(S_1) = \frac{d^2}{12}.}$$

b) Par indépendance, le théorème de convolution permet de choisir

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour que le produit soit non nul, il faut simultanément $0 \le t \le d$ et $x - d \le t \le x$. Si $x < 0$ ou $x > 2d$, ces intervalles ne se rencontrent pas. Si $x = 2d$, leur intersection est réduite au point d, ce qui donne une intégrale nulle. Ainsi

$$\boxed{f_2(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ ou } x \ge 2d.}$$

c) Pour $0 \le x \le d$, l'intersection des intervalles est $[0, x]$ et le produit y vaut $1/d^2$. Donc

$$\boxed{f_2(x) = \int_0^x \frac{1}{d^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{d^2}.}$$

d) Pour $d \le x \le 2d$, l'intersection est $[x - d, d]$, de longueur $2d - x$. On obtient

$$\boxed{f_2(x) = \begin{cases} x/d^2, & 0 \le x \le d, \\ (2d-x)/d^2, & d < x \le 2d, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Les expressions coïncident en d. Cette fonction est positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R}$, et son intégrale vaut $\int_0^d x/d^2\,\mathrm{d}x + \int_d^{2d}(2d-x)/d^2\,\mathrm{d}x = 1/2 + 1/2 = 1$. Elle vérifie donc également les propriétés d'une densité.

10. Étape de récurrence pour f_n.

Les variables S_n et U_{n+1} sont indépendantes, car elles dépendent de groupes disjoints de variables indépendantes. Le théorème de convolution permet de choisir

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t) f_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{d}\int_0^d f_n(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Si $x < 0$ et $t \ge 0$, alors $x - t < 0$ et l'hypothèse donne $f_n(x-t) = 0$. Donc

$$\boxed{\forall x < 0, \quad f_{n+1}(x) = 0.}$$

b) Pour $0 \le x \le d$, les termes avec $t > x$ sont nuls. Pour $0 \le t \le x$, $x - t \in [0, d]$, donc

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{1}{d}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!d^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!d^{n+1}}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in [0,d], \quad f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!d^{n+1}}.}$$

Pour $n = 1$, l'intégrande $(x-t)^0$ vaut 1, y compris à la borne, conformément à la densité choisie pour f_1.

11. Probabilité de rester sous d.

La densité f_1 satisfait les hypothèses de la question 10. La récurrence donne donc, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = 0$ si $x < 0$ et $f_n(x) = x^{n-1}/((n-1)!d^n)$ sur $[0,d]$. Puisque S_n est à densité, la probabilité d'une valeur isolée est nulle ; ainsi

$$\mathbb{P}(S_n < d) = \int_0^d \frac{x^{n-1}}{(n-1)!d^n}\,\mathrm{d}x = \frac{d^n/n}{(n-1)!d^n}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(S_n < d) = \frac{1}{n!}.}$$

12. Espérance du premier temps d'atteinte dans le modèle continu.

a) Comme $S_1 = U_1 \leq d$, l'événement $[T = 1]$ impose $U_1 = d$. La loi est à densité, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 1) = 0.}$$

b) Les U_i sont positives ou nulles, donc les sommes S_n sont croissantes. Ne pas avoir atteint d aux n premiers rangs équivaut à être encore sous le seuil au dernier de ces rangs :

$$\boxed{[T > n] = [S_n < d], \qquad \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n!}.}$$

Ces probabilités tendent vers 0. Le théorème de la limite monotone pour les événements décroissants montre que le seuil est atteint en un rang fini avec probabilité 1. On peut attribuer une valeur quelconque à T sur l'événement exceptionnel de probabilité nulle, ce qui ne change pas sa loi.

c) On a $\mathbb{P}(T \geq 1) = 1$ et, pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T > n-1) = 1/(n-1)!$. La série de ces probabilités vaut la somme connue de la série exponentielle numérique en 1, $\sum_{m=0}^{+\infty} 1/m! = \mathrm{e}$. Cette identité peut aussi être vérifiée par la formule de Taylor appliquée à exp sur $[0,1]$, dont le reste est majoré par $\mathrm{e}/(m+1)!$ et tend vers 0. La question 7 assure l'existence de l'espérance et son calcul :

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e}.}$$

Dans ce modèle, l'espérance est égale à e pour tout réel $d > 0$.