

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2026

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Produit de deux variables uniformes

Exercice 1 – Lois, moments et intégrales

Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, uniformes sur $[0, 1]$, et prennent leurs valeurs dans $]0, 1]$. On pose $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$ et $Z = X_1X_2$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Simulation de Z .

On tire deux réalisations indépendantes de la loi uniforme, puis on renvoie leur produit. On renouvelle un tirage s'il est nul, afin de conserver des valeurs strictement positives.

```
def simulZ():
    X1 = rd.random()
    while X1 == 0:
        X1 = rd.random()
    X2 = rd.random()
    while X2 == 0:
        X2 = rd.random()
    return X1 * X2
```

`simulZ()` renvoie une réalisation de $Z = X_1X_2$.

2. Espérance et variance.

Comme $0 < Z \leq 1$, Z et Z^2 sont bornées ; leurs espérances existent, et Z possède une variance. Pour une variable uniforme sur $[0, 1]$,

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(X_i^2) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

L'indépendance donne

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \frac{1}{9}.$$

On a utilisé aussi l'indépendance de X_1^2 et X_2^2 , qui sont des fonctions de variables indépendantes. Par la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}.$$

3. Loïs des logarithmes.

- a) Pour $x < 0$, la stricte croissance du logarithme donne

$$F(x) = \mathbb{P}(\ln(X_1) \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq e^x) = e^x,$$

car $e^x \in]0, 1[$. Pour $x \geq 0$, $\ln(X_1) \leq 0 \leq x$, donc $F(x) = 1$. Le même calcul vaut pour Y_2 .

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

- b) La fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En la dérivant là où elle est dérivable, on obtient une densité commune ; on choisit la valeur 1 au point 0, ce qui ne change pas la loi :

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

4. Loi de la somme des logarithmes, puis de Z .

- a) Les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes car elles sont respectivement fonctions de X_1 et X_2 . Le théorème de convolution donne une densité de leur somme :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt.$$

Pour que le produit soit non nul, il faut simultanément $t \leq 0$ et $x - t \leq 0$, soit $x \leq t \leq 0$. Pour $x < 0$, cela donne

$$h(x) = \int_x^0 e^t e^{x-t} dt = e^x \int_x^0 dt = -xe^x.$$

Pour $x > 0$, aucun t ne vérifie ces deux conditions, donc $h(x) = 0$. Pour $x = 0$, l'intervalle est réduit à un point et la convolution vaut également 0.

$$h(x) = \begin{cases} -xe^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Vérifions les propriétés d'une densité. La fonction h est positive ou nulle et continue sur $\mathbb{R}$, puisque $-xe^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^-$. La fonction $t \mapsto (1-t)e^t$ a pour dérivée $-te^t$, donc, pour $A < 0$,

$$\int_A^0 h(t) dt = 1 - (1-A)e^A.$$

Par croissances comparées, $(1-A)e^A \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow -\infty$. Ainsi l'intégrale de h sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

- b) Pour $x \leq 0$, on calcule d'abord sur $[A, x]$, avec $A < x$:

$$\int_A^x h(t) dt = (1-x)e^x - (1-A)e^A.$$

En faisant tendre A vers $-\infty$, on obtient $H(x) = (1-x)e^x$. Pour $x > 0$, la somme $Y_1 + Y_2$ est toujours inférieure ou égale à 0, donc $H(x) = 1$.

$$H(x) = \begin{cases} (1-x)e^x, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

- c) Puisque $Z > 0$, $F_Z(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $0 < x \leq 1$, la stricte croissance du logarithme et $\ln Z = Y_1 + Y_2$ donnent

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq \ln x) = H(\ln x) = (1 - \ln x)e^{\ln x} = x(1 - \ln x).$$

Enfin $Z \leq 1$, donc $F_Z(x) = 1$ pour $x > 1$.

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x(1 - \ln x), & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ainsi F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0 et en 1. Pour $0 < x < 1$,

$$\frac{d}{dx}(x(1 - \ln x)) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

En dérivant la fonction de répartition sur les intervalles où elle est dérivable, puis en choisissant la valeur 0 aux extrémités, on retrouve bien la densité annoncée :

$$f_Z(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Une famille d'intégrales et calcul des moments par la densité.

- a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Sur le segment $[\varepsilon, 1]$, les fonctions

$$u(x) = \ln x, \quad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ et ont pour dérivées $u'(x) = 1/x$ et $v'(x) = x^n$. L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} - \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $n+1 > 0$, les croissances comparées donnent $\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. L'intégrale impropre converge donc, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- b) La question précédente, aux rangs 1 et 2, donne

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 x(-\ln x) \, dx = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \int_0^1 x^2(-\ln x) \, dx = \frac{1}{9}.$$

On retrouve donc

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{7}{144}.$$

Exercice 2 – Approximation de π et méthode de Richardson

Exercice 2 – Suites et comparaison des erreurs

On considère $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, puis $u_{n+1} = \sqrt{(1+u_n)/2}$ et $v_{n+1} = v_n/u_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Les deux formules trigonométriques et le développement limité du sinus indiqués dans l'énoncé sont admis.

Corrigé – Exercice 2.

Sens des notations de reste. Pour une suite $s_n > 0$, écrire $r_n = o(s_n)$ signifie $r_n/s_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le reste $o(t^5)$ du développement limité du sinus signifie de même une fonction $R(t)$ telle que $R(t)/t^5 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$. Pour deux suites dont la seconde est non nulle à partir d'un certain rang, $a_n \sim b_n$ signifie $a_n/b_n \rightarrow 1$.

1. Existence des deux suites.

Montrons par récurrence que les termes sont définis et que $0 \leq u_n < 1$ et $v_n > 0$. Au rang 1, $u_1 = 0$ et $v_1 = 2$ vérifient ces conditions. Si elles sont vraies au rang n , alors

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} < 1.$$

La racine carrée existe, et $1/\sqrt{2} \leq u_{n+1} < 1$. En particulier, $u_{n+1} > 0$, donc $v_{n+1} = v_n/u_{n+1}$ est défini et strictement positif. La récurrence est établie.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n < 1, \quad v_n > 0, \quad \text{et les deux suites sont bien définies.}}$$

2. Calcul de v_n en Python.

À chaque étape, il faut calculer le nouveau u avant de mettre à jour v , car le dénominateur dans la récurrence est u_{n+1} .

```
def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n + 1):
        u = np.sqrt((1 + u) / 2)
        v = v / u
    return v
```

Pour $n = 1$, la boucle est vide et on renvoie $v_1 = 2$. Pour $n \geq 2$, après l'étape d'indice k , les variables u et v contiennent respectivement u_k et v_k .

$$\boxed{\text{suite_v}(n) \text{ renvoie } v_n \quad (n \geq 1).}$$

3. Expressions trigonométriques explicites.

- a) La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, avec valeurs 1 en 0 et 0 en $\pi/2$. Le théorème de la bijection assure qu'elle réalise une bijection sur $[0, 1]$. Chaque $u_n \in [0, 1[$ admet donc un unique antécédent $\alpha_n \in [0, \pi/2]$. En choisissant cet unique antécédent pour chaque n , on obtient

$$\boxed{\exists! (\alpha_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \geq 1, \quad \alpha_n \in [0, \pi/2], \quad u_n = \cos \alpha_n.}$$

b) La formule $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$, appliquée à $a = \alpha_n/2$, donne

$$\frac{1 + \cos \alpha_n}{2} = \cos^2(\alpha_n/2).$$

Puisque $\alpha_n/2 \in [0, \pi/4]$, son cosinus est positif. Ainsi

$$u_{n+1} = \sqrt{\cos^2(\alpha_n/2)} = \cos(\alpha_n/2).$$

Par unicité de l'antécédent dans $[0, \pi/2]$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$. De plus, $u_1 = 0 = \cos(\pi/2)$, donc $\alpha_1 = \pi/2$. La suite est géométrique de raison $1/2$ et

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

c) Montrons par récurrence que $v_n = 2^n \sin \alpha_n$. Pour $n = 1$, $2 \sin(\pi/2) = 2 = v_1$. Si la formule est vraie au rang n , alors $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$ et $u_{n+1} = \cos \alpha_{n+1} > 0$, donc

$$v_{n+1} = \frac{2^n \sin(2\alpha_{n+1})}{\cos \alpha_{n+1}} = \frac{2^n 2 \sin \alpha_{n+1} \cos \alpha_{n+1}}{\cos \alpha_{n+1}} = 2^{n+1} \sin \alpha_{n+1}.$$

Par récurrence,

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Posons $t_n = \pi/2^n$. On a $t_n > 0$ et $t_n \rightarrow 0$. La dérivabilité du sinus en 0 donne $\sin(t_n)/t_n \rightarrow \cos(0) = 1$. Puisque $v_n = \pi \sin(t_n)/t_n$, on obtient

$$v_n \longrightarrow \pi.$$

4. Identification des constantes a, b, c .

Écrivons le développement limité donné sous la forme

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^5 \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

En remplaçant t par $t_n = \pi/2^n$ et en multipliant par 2^n ,

$$\begin{aligned} v_n &= \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 2^{4n}} + \frac{\pi^5 \varepsilon(t_n)}{2^{4n}} \\ &= \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o(4^{-2n}). \end{aligned}$$

Le dernier reste a bien le sens précisé plus haut, puisque $\pi^5 \varepsilon(t_n) \rightarrow 0$.

$$a = \pi, \quad b = -\frac{\pi^3}{6}, \quad c = \frac{\pi^5}{120}.$$

5. Première extrapolation de Richardson.

On pose $w_n = (4v_{n+1} - v_n)/3$.

a) On appelle la fonction précédente aux rangs n et $n+1$, puis on forme la combinaison demandée :

```
def suite_w(n):
    return (4 * suite_v(n + 1) - suite_v(n)) / 3
```

`suite_w(n)` renvoie w_n .

b) Puisque $v_n \rightarrow \pi$ et $v_{n+1} \rightarrow \pi$,

$$w_n \longrightarrow \frac{4\pi - \pi}{3} = \pi.$$

c) Avec les constantes de la question 4, on a

$$v_n = a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o(4^{-2n}),$$

$$v_{n+1} = a + \frac{b/4}{4^n} + \frac{c/16}{4^{2n}} + o(4^{-2n}).$$

Le reste de cette deuxième écriture est bien $o(4^{-2n})$, car $4^{-2(n+1)} = 4^{-2n}/16$. En effectuant la combinaison,

$$4v_{n+1} - v_n = 3a + \frac{(4/4 - 1)b}{4^n} + \frac{(4/16 - 1)c}{4^{2n}} + o(4^{-2n})$$

$$= 3a - \frac{3c}{4 \cdot 4^{2n}} + o(4^{-2n}).$$

En divisant par 3,

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} + o(4^{-2n}).$$

Le premier terme non nul de l'erreur de v_n est $-\pi^3/(6 \cdot 4^n)$: le terme en 4^{-2n} et le reste sont négligeables devant 4^{-n} . Les deux écritures donnent ainsi

$$v_n - \pi \sim -\frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n}, \quad w_n - \pi \sim -\frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}}.$$

Le premier équivalent garantit que $v_n - \pi$ est non nul à partir d'un certain rang. En divisant les équivalents,

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{80 \cdot 4^n}.$$

d) L'équivalent précédent implique

$$\frac{|w_n - \pi|}{|v_n - \pi|} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour un même rang n suffisamment grand, l'erreur absolue sur w_n est négligeable devant celle sur v_n . La combinaison annule le terme d'erreur en 4^{-n} et conserve une erreur de l'ordre de 4^{-2n} , au sens des équivalents de c). C'est l'intérêt de w_n pour approcher π .

6. Généralisation à deux facteurs $0 < r < q < 1$.

On suppose $x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n)$ avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

a) Cherchons $y_n = Ax_n + Bx_{n+1}$ avec des coefficients constants. Pour conserver la limite a , choisissons $A + B = 1$. Pour annuler le terme en q^n , imposons $A + Bq = 0$. La résolution donne $B = 1/(1 - q)$ et $A = -q/(1 - q)$, d'où

$$y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1 - q}.$$

Le reste au rang $n + 1$ est $o(r^{n+1}) = o(r^n)$, et

$$\begin{aligned} x_{n+1} - qx_n &= (1 - q)a + b(q^{n+1} - qq^n) + c(r^{n+1} - qr^n) + o(r^n) \\ &= (1 - q)a + c(r - q)r^n + o(r^n). \end{aligned}$$

Ainsi

$$y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1 - q} = a + dr^n + o(r^n), \quad d = \frac{c(r - q)}{1 - q}.$$

Comme $r < q$, $q < 1$ et $c \neq 0$, on a $d \neq 0$.

b) Puisque $0 < r/q < 1$,

$$\frac{cr^n}{q^n} = c \left(\frac{r}{q} \right)^n \longrightarrow 0.$$

Si $R_n = o(r^n)$, alors

$$\frac{R_n}{q^n} = \frac{R_n}{r^n} \left(\frac{r}{q} \right)^n \longrightarrow 0.$$

Le terme cr^n et le reste sont donc tous deux $o(q^n)$.

$$x_n = a + bq^n + o(q^n).$$

c) Les deux suites convergent vers a , puisque $q^n \rightarrow 0$, $r^n \rightarrow 0$ et les restes correspondants tendent aussi vers 0. Avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$x_n - a \sim bq^n, \quad y_n - a \sim dr^n.$$

On obtient la comparaison précise des erreurs :

$$\frac{|y_n - a|}{|x_n - a|} \sim \left| \frac{d}{b} \right| \left(\frac{r}{q} \right)^n \longrightarrow 0.$$

C'est en ce sens que l'approximation donnée par y_n est meilleure que celle donnée par x_n lorsque n est suffisamment grand.

Exercice 3 – Premier retour et mélange de lois géométriques

Exercice 3 – Lois discrètes, convergence en loi et espérances

À l'instant $k \geq 1$, le mobile choisit uniformément une abscisse parmi $0, \dots, k$, indépendamment des choix précédents. On étudie le premier retour à 0, puis les variables Z_n définies par le mélange conditionnel de lois géométriques du sujet.

Corrigé – Exercice 3.

Partie 1 – Rang du premier retour à l'origine

1. Loi et moments de X_k .

a) L'ensemble $\{0, \dots, k\}$ contient $k + 1$ abscisses et le choix est équiprobable. Ainsi

$$X_k \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, k\}), \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}, \quad \mathbb{P}(X_k = j) = \frac{1}{k+1}.$$

Pour les autres valeurs de j , la probabilité est nulle.

b) Comme X_k prend un nombre fini de valeurs, ses moments jusqu'à l'ordre 2 existent. En utilisant les formules des sommes des premiers entiers et de leurs carrés,

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k j = \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2},$$

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k j^2 = \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(2k+1)}{6}.$$

Par König–Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_k) &= \frac{k(2k+1)}{6} - \frac{k^2}{4} = \frac{2k(2k+1) - 3k^2}{12} \\ &= \frac{k^2 + 2k}{12}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{k}{2}, \quad \mathbb{V}(X_k) = \frac{k(k+2)}{12}.$$

2. Loi du rang Y du premier retour.

a) Pour que le premier retour ait lieu à l'instant n , il faut que les abscisses aux instants $1, \dots, n-1$ soient non nulles, puis que celle à l'instant n soit nulle :

$$[Y = n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \neq 0] \right) \cap [X_n = 0].$$

Pour $n = 1$, l'intersection vide est Ω et on retrouve $[Y = 1] = [X_1 = 0]$.

b) L'indépendance mutuelle des variables X_k donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = n) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k \neq 0) \right) \mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \right) \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Les facteurs du produit se simplifient successivement et donnent $\prod_{k=1}^{n-1} k/(k+1) = 1/n$, y compris pour $n = 1$, où le produit vide vaut 1. Donc

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

c) Pour tout $N \geq 1$, le télescopage donne

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(Y = n) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1 \quad (N \rightarrow +\infty).$$

La série converge donc et sa somme vaut 1. Comme les événements $[Y = 0], [Y = 1], [Y = 2], \dots$ forment un système complet d'événements, leurs probabilités ont pour somme 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 0.$$

Le retour à l'origine a donc lieu avec probabilité 1.

d) Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1}.$$

Cette somme partielle de la série harmonique tend vers $+\infty$. La série qui définit l'espérance d'une variable positive ne converge pas vers un réel fini.

Y n'admet pas d'espérance finie.

Partie 2 – Étude de la variable Z_n

Pour $n \geq 1$, U_n est uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$. Conditionnellement à $[U_n = k]$, Z_n suit la loi géométrique de paramètre $p_k = 1 - k/n$, avec $0 < p_k \leq 1$ et valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

3. Simulation conditionnelle.

On simule d'abord l'entier uniforme U , avec borne supérieure n exclue, puis une réalisation de la loi géométrique de paramètre $1 - U/n$.

```
def var_Z(n):
    U = rd.randint(0, n)
    Z = rd.geometric(1 - U / n)
    return Z
```

Le paramètre est toujours dans $[1/n, 1]$, donc le tirage géométrique est bien défini, y compris si $n = 1$, où $U = 0$ et $Z = 1$.

`var_Z(n)` renvoie une réalisation de Z_n .

4. Loi de Z_n et convergence en loi.

- a) Utilisons le système complet d'événements $([U_n = k])_{k=0,\dots,n-1}$. La formule des probabilités totales donne, pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(U_n = k) \mathbb{P}(Z_n = i \mid U_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Pour $i = 1$, le facteur $(k/n)^0$ vaut 1, y compris lorsque $k = 0$: on retrouve bien la probabilité du premier succès. En développant chaque terme de la somme finie,

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i.$$

- b) Fixons $i \geq 1$. Les fonctions $t \mapsto t^{i-1}$ et $t \mapsto t^i$ sont continues sur $[0, 1]$. Les sommes de a) sont leurs sommes de Riemann associées à la subdivision régulière et aux extrémités gauches :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} &\longrightarrow \int_0^1 t^{i-1} dt = \frac{1}{i}, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i &\longrightarrow \int_0^1 t^i dt = \frac{1}{i+1}.\end{aligned}$$

En prenant la différence,

$$\forall i \geq 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \mathbb{P}(Y = i).$$

- c) Utilisons la définition de la convergence en loi par les fonctions de répartition. Pour $x < 1$, $Z_n \geq 1$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, donc $F_{Z_n}(x) = F_Y(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, posons $m = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$F_{Z_n}(x) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(Z_n = i).$$

Il s'agit d'une somme finie, dont chaque terme converge d'après b). Par conséquent,

$$F_{Z_n}(x) \longrightarrow \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(Y = i) = 1 - \frac{1}{m+1} = F_Y(x).$$

La convergence a donc lieu en particulier à chaque point de continuité de F_Y , comme le demande la définition.

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y.$$

5. Existence et calcul de l'espérance de Z_n .

Le système $([U_n = k])_{k=0,\dots,n-1}$ est un système complet fini, et chaque événement a probabilité $1/n > 0$. Sur l'événement $[U_n = k]$, la loi géométrique de paramètre $p_k > 0$ possède une espérance finie

$$\mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k) = \frac{1}{p_k} = \frac{1}{1 - k/n} = \frac{n}{n - k}.$$

Les n espérances conditionnelles sont finies, donc leur somme pondérée par les probabilités est finie. Cela justifie l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$ et l'emploi de la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(U_n = k) \mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}.\end{aligned}$$

Les indices $n - k$ décrivent les entiers $n, n - 1, \dots, 1$, d'où

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

6. Encadrement et équivalent de l'espérance.

a) Pour $k \geq 1$ et $t \in [k, k + 1]$, la décroissance de $1/t$ donne

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur ce segment de longueur 1, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

b) Posons $H_n = \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{j=1}^n 1/j$. En sommant les inégalités de a) pour $k = 1, \dots, n - 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Les trois termes sont respectivement $H_n - 1$, $\ln n$ et $H_n - 1/n$. Ainsi $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - 1/n$, ce qui équivaut à

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln n + 1.$$

c) Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le théorème d'encadrement donne

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.}$$

Problème – Matrices symétriques positives

Problème – Racine carrée positive et comparaison des inverses

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles. Une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si ${}^tXMX \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble de ces matrices est noté $S_n^+(\mathbb{R})$.

Corrigé – Problème.

Partie 1 – Caractérisation des matrices positives

1. Les valeurs propres d'une matrice positive.

- a) Par définition d'une valeur propre λ de A , il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant à gauche par ${}^tX$, on obtient ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$. Comme ${}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, on peut diviser :

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}.$$

- b) La positivité de A donne ${}^tXAX \geq 0$. Le dénominateur est strictement positif, donc

$$\lambda \geq 0.$$

2. La réciproque par diagonalisation orthogonale.

- a) Puisque A est symétrique réelle, le théorème spectral fournit une base orthonormée de vecteurs propres de A . Soit P la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice des valeurs propres correspondantes. Alors ${}^tPP = P{}^tP = I_n$, $AP = PD$ et

$$A = PD{}^tP, \quad P \text{ orthogonale, } D \text{ diagonale réelle.}$$

- b) Pour $Y = {}^tPX$, on a $X = PY$ et

$${}^tY = {}^tXP.$$

En utilisant $A = PD{}^tP$, on obtient

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY.$$

- c) Si $\lambda_i \geq 0$ pour tout i , alors, pour tout X ,

$${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0, \quad A \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

3. Conclusion de la caractérisation.

La question 1 prouve le sens direct et la question 2 le sens réciproque. Pour toute matrice symétrique réelle A ,

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[.$$

Ici le mot « positif » pour les valeurs propres signifie positif ou nul.

Partie 2 – Construction d’une racine carrée positive

On suppose $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $A = PD^tP$, avec P et D comme dans la partie 1.

4. Définition de Δ et construction de B .

a) La question 3 donne $\lambda_i \geq 0$ pour tout i . Chaque $\sqrt{\lambda_i}$ est donc un réel bien défini, et

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

b) Posons $B = P\Delta^tP$. Comme ${}^t\Delta = \Delta$, on a

$${}^tB = P^t\Delta^tP = P\Delta^tP = B.$$

Pour tout X , en posant $Y = {}^tPX$,

$${}^tXBX = {}^tY\Delta Y = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} y_i^2 \geq 0.$$

Ainsi B est symétrique positive. De plus,

$$B^2 = P\Delta^tPP\Delta^tP = P\Delta^{2t}P = PD^tP = A,$$

car $\Delta^2 = D$.

$$B = P\Delta^tP \in S_n^+(\mathbb{R}), \quad B^2 = A.$$

5. Valeurs des polynômes L_i aux points μ_j .

Les valeurs propres distinctes $\mu_1, \dots, \mu_p$ vérifient $\mu_i - \mu_k \neq 0$ si $i \neq k$: les fractions qui définissent L_i sont donc bien définies. En $x = \mu_i$, chaque facteur vaut 1, donc $L_i(\mu_i) = 1$. En $x = \mu_j$ avec $j \neq i$, le facteur d’indice $k = j$ a pour numérateur $\mu_j - \mu_j = 0$; le produit vaut donc 0.

$$L_i(\mu_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Pour $p = 1$, le produit vide vaut 1, donc L_1 est le polynôme constant égal à 1 ; la formule reste valable.

6. Expression de B comme polynôme en A .

On pose $S = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i$.

a) D’après la question 5, pour $1 \leq k \leq p$,

$$S(\mu_k) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}.$$

Chaque λ_j est l’une des valeurs μ_k , d’où

$$\forall k, S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}, \quad \forall j, S(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j}.$$

b) Pour $k = 0$, $A^0 = I_n = PI_n^tP = PD^{0t}P$. Si $A^k = PD^{kt}P$, alors

$$A^{k+1} = (PD^{kt}P)(PD^tP) = PD^k({}^tPP)D^tP = PD^{k+1t}P.$$

La récurrence donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^{kt}P.$$

- c) Chaque L_i a un degré inférieur ou égal à $p-1$, donc on peut écrire $S(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$.
La sous-question b) donne

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k P D^k t P \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k D^k \right) t P = P S(D) t P. \end{aligned}$$

Puisque D est diagonale,

$$S(D) = \text{diag}(S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n)) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta.$$

Ainsi

$$S(A) = P S(D) t P = P \Delta t P = B.$$

Partie 3 – Unicité de la racine carrée symétrique positive

Soit $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$. Montrons qu'elle est nécessairement égale à la matrice B construite ci-dessus.

7. Commutation des matrices.

- a) Comme $A = C^2$, les deux produits valent C^3 :

$$AC = C^2 C = C^3 = C C^2 = CA.$$

- b) Pour $k = 0$, $A^0 C = C I_n = C = C A^0$. Si $A^k C = C A^k$, alors, en utilisant a),

$$A^{k+1} C = A(A^k C) = A C A^k = C A A^k = C A^{k+1}.$$

La récurrence prouve que C commute avec toutes les puissances naturelles de A .
La question 6 c) donne $B = S(A) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k$, donc

$$BC = \sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k C = \sum_{k=0}^{p-1} a_k C A^k = CB.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k C = C A^k, \quad BC = CB.$$

8. Construction d'une base propre commune et conclusion.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien canonique. Les endomorphismes b et c associés à B et C sont symétriques. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, $E_i = \text{Ker}(b - \sqrt{\mu_i} \text{Id})$.

- a) Le produit de matrices représente la composition des endomorphismes dans la base canonique. La relation $BC = CB$ donne

$$b \circ c = c \circ b.$$

- b) Soit $x \in E_i$, donc $b(x) = \sqrt{\mu_i} x$. Par commutation et par linéarité de c ,

$$b(c(x)) = c(b(x)) = c(\sqrt{\mu_i} x) = \sqrt{\mu_i} c(x).$$

Ainsi $c(x) \in E_i$, ce qui montre

$$E_i \text{ est stable par } c.$$

- c) La stabilité assure que la restriction c_i est un endomorphisme de E_i . Pour $x, y \in E_i$,

$$\langle c_i(x), y \rangle = \langle c(x), y \rangle = \langle x, c(y) \rangle = \langle x, c_i(y) \rangle,$$

par symétrie de c . Donc

$$\boxed{c_i \text{ est symétrique sur l'espace euclidien } E_i.}$$

- d) Le théorème spectral appliqué à c_i fournit une base orthonormée $\mathcal{B}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres de c_i . Tout vecteur non nul de E_i est aussi vecteur propre de b pour la valeur $\sqrt{\mu_i}$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{B}_i \text{ est une base orthonormée de } E_i \text{ propre pour } c_i \text{ et } b.}$$

- e) Les valeurs propres de b sont exactement les $\sqrt{\mu_i}$, puisque $B = P\Delta^t P$. Elles sont distinctes lorsque les μ_i le sont. Le théorème spectral appliqué à b montre que ses espaces propres $E_1, \dots, E_p$ ont pour somme directe $\mathbb{R}^n$.

Ils sont aussi deux à deux orthogonaux : pour $x \in E_i, y \in E_j$ et $i \neq j$, la symétrie de b donne

$$\sqrt{\mu_i} \langle x, y \rangle = \langle b(x), y \rangle = \langle x, b(y) \rangle = \sqrt{\mu_j} \langle x, y \rangle.$$

Les deux racines étant distinctes, $\langle x, y \rangle = 0$. En concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, on obtient une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Chaque vecteur de cette base est propre pour b et pour c , car sur E_i , c_i est la restriction de c .

$$\boxed{\text{Dans } \mathcal{B}, \text{ les matrices de } b \text{ et } c \text{ sont toutes deux diagonales.}}$$

- f) Soit $e \in \mathcal{B}_i$. On a $b(e) = \sqrt{\mu_i}e$ et $c(e) = \nu e$ pour un certain réel ν . Comme e est unitaire et C positive,

$$\nu = \langle c(e), e \rangle \geq 0.$$

Les endomorphismes b^2 et c^2 ont tous deux pour matrice canonique A , donc ils sont égaux. En les appliquant à e ,

$$\nu^2 e = c^2(e) = b^2(e) = \mu_i e.$$

Puisque $e \neq 0$, $\nu^2 = \mu_i$. Avec $\nu \geq 0$, on obtient $\nu = \sqrt{\mu_i}$, donc $c(e) = b(e)$. Les deux endomorphismes coïncident sur chaque vecteur d'une base, d'où $c = b$ et

$$\boxed{C = B.}$$

La racine carrée symétrique positive existe par la question 4 et est unique. On peut donc la noter sans ambiguïté

$$\boxed{B = A^{1/2}.}$$

Partie 4 – Inversibilité et positivité

Une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^t X M X > 0.$$

9. Caractérisation des matrices définies positives.

Si A est définie positive, la formule de la question 1 a), appliquée à un vecteur propre non nul, donne immédiatement $\lambda > 0$ pour chaque valeur propre. Réciproquement, si tous les λ_i sont strictement positifs, la formule de la question 2 donne, pour $X \neq 0$,

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad Y = {}^t P X \neq 0.$$

Au moins un y_i est non nul et son terme est strictement positif ; les autres termes sont positifs ou nuls. La somme est donc strictement positive.

$$A \text{ définie positive} \iff \text{Sp}(A) \subset]0, +\infty[.$$

10. Une matrice symétrique M telle que $M - I_n$ est positive.

a) Comme M et I_n sont symétriques,

$${}^tN = {}^t(M - I_n) = M - I_n = N.$$

b) Soit λ une valeur propre de M et $X \neq 0$ un vecteur propre correspondant. On a $NX = (M - I_n)X = (\lambda - 1)X$. La positivité de N et la question 3 donnent $\lambda - 1 \geq 0$, soit

$$\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[.$$

Le théorème spectral donne $M = PD^tP$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 1$. Les coefficients diagonaux sont non nuls, donc

$$D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}), \quad M^{-1} = PD^{-1}P.$$

Cela établit l'inversibilité de M . Ensuite,

$$I_n - M^{-1} = P(I_n - D^{-1})^tP = P \text{diag}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}, \dots, 1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)^tP.$$

Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles, puisque $\lambda_i \geq 1$. La question 3 donne donc

$$M \text{ est inversible et } I_n - M^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

11. Comparaison des inverses de S_1 et S_2 .

On suppose S_1 définie positive et $S_2 - S_1$ symétrique positive.

a) Pour $X \neq 0$,

$${}^tXS_2X = {}^tXS_1X + {}^tX(S_2 - S_1)X > 0,$$

car le premier terme est strictement positif et le second positif ou nul. Ainsi

$$S_2 \text{ est définie positive.}$$

La question 9 et la diagonalisation orthogonale assurent en particulier que S_1 et S_2 sont inversibles.

b) Posons $H = S_1^{1/2}$. La question 9 donne des valeurs propres strictement positives pour S_1 , donc celles de H sont leurs racines carrées strictement positives. Ainsi H est inversible. Notons $R = H^{-1} = S_1^{-1/2}$. Comme $S_1 = H^2$,

$$RS_1R = RH^2R = (RH)(HR) = I_n.$$

En développant,

$$\begin{aligned} S_1^{1/2} \text{ est inversible,} \\ S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2} - I_n. \end{aligned}$$

- c) On a $L = RS_2R$. L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique : ${}^tR = ({}^tH)^{-1} = H^{-1} = R$. Comme S_2 est symétrique, la transposition du produit donne

$${}^tL = {}^tR {}^tS_2 {}^tR = RS_2R = L.$$

Ainsi L et $L - I_n$ sont symétriques. D'après b), $L - I_n = R(S_2 - S_1)R$. Pour tout X , posons $Y = RX$. Alors

$${}^tX(L - I_n)X = {}^tXR(S_2 - S_1)RX = {}^tY(S_2 - S_1)Y \geq 0.$$

On conclut

$$\boxed{L \text{ est symétrique et } L - I_n \in S_n^+(\mathbb{R}).}$$

- d) Les hypothèses de la question 10 sont vérifiées pour la matrice $M = L$. On obtient directement

$$\boxed{L \text{ est inversible et } I_n - L^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R}).}$$

- e) Puisque $L = RS_2R$ et $R^{-1} = H$, l'inverse du produit est

$$L^{-1} = HS_2^{-1}H.$$

On peut le vérifier dans les deux ordres ; par exemple,

$$(RS_2R)(HS_2^{-1}H) = RS_2(RH)S_2^{-1}H = RH = I_n.$$

De plus, $S_1^{-1} = R^2$, donc $HS_1^{-1}H = HR^2H = (HR)(RH) = I_n$. Par conséquent,

$$H(S_1^{-1} - S_2^{-1})H = I_n - HS_2^{-1}H = I_n - L^{-1}.$$

La sous-question d) donne

$$\boxed{S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2} \in S_n^+(\mathbb{R}).}$$

Posons $K = H(S_1^{-1} - S_2^{-1})H$. On a $S_1^{-1} - S_2^{-1} = RKR$ puisque $RH = HR = I_n$. Pour tout X , avec $Y = RX$,

$${}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = {}^tX R K R X = {}^tY K Y \geq 0.$$

Enfin, $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ est symétrique, car les deux inverses sont symétriques. Ainsi

$$\boxed{S_1^{-1} - S_2^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R}).}$$