

EML

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2026

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Problème 1 – Quotient quadratique et inégalité de trace

Problème 1 – Optimisation et projections orthogonales

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On étudie le quotient quadratique d'une matrice symétrique, puis le maximum de $\text{Tr}({}^tMAM)$ lorsque les colonnes de M sont ortho-normées.

Corrigé – Problème 1.

Partie I – Un exemple

1. Diagonalisation orthogonale de A .

Les vecteurs $v_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ et $v_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$ sont unitaires et orthogonaux. Un calcul direct donne $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = 0$. En les plaçant en colonnes, dans l'ordre des valeurs propres décroissantes,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = QD{}^tQ.$$

En effet, ${}^tQQ = I_2$ et $AQ = QD$.

2. Étude de φ .

a) La multiplication matricielle donne

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert considéré. Le quotient est donc de classe $\mathcal{C}^2$ (même $\mathcal{C}^\infty$) :

$$\varphi(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

b) En dérivant les quotients par rapport à une variable, l'autre étant fixée,

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2 \varphi(x, y) = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Si $x = 0$ et $y \neq 0$, la première dérivée est non nulle ; si $y = 0$ et $x \neq 0$, la seconde est non nulle. Sinon, les deux dérivées s'annulent exactement quand $x^2 = y^2$. Ainsi

$$\text{Points critiques : } (a, a) \text{ et } (a, -a), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Il y en a une infinité.

c) Pour $\alpha \neq 0$, on simplifie le facteur α^2 :

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = 1 + \frac{2\alpha^2 xy}{\alpha^2(x^2 + y^2)} = \varphi(x, y).$$

d) La restriction de φ au cercle unité est continue sur un fermé borné non vide. Le théorème des bornes atteintes y assure un maximum. Toute paire non nulle se ramène à ce cercle en la divisant par sa norme ; c) montre que la valeur de φ est conservée. Ce maximum est donc global sur l'ouvert. Enfin, $(x - y)^2 \geq 0$ donne $2xy \leq x^2 + y^2$, avec égalité exactement si $x = y$. D'où

$$\max \varphi = 2, \quad \varphi(x, y) = 2 \iff x = y \neq 0.$$

Partie II – Une inégalité sur la trace

3. Coefficients et traces de deux produits.

a) Par définition du produit matriciel,

$$({}^tBB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,i} b_{\ell,j} \quad (1 \leq i, j \leq m),$$

$$(B{}^tB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^m b_{i,\ell} b_{j,\ell} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

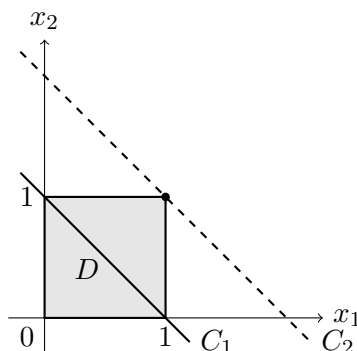
b) Les deux traces sont la même somme finie de carrés :

$$\text{Tr}({}^tBB) = \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,i}^2 = \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^m b_{\ell,i}^2 = \text{Tr}(B{}^tB).$$

4. Représentation de D , C_1 et C_2 pour $n = 2$.

On a $D = [0, 1]^2$, $C_1 : x_2 = 1 - x_1$ et $C_2 : x_2 = 2 - x_1$. Les C_i sont des droites entières ; le dessin en montre une portion.

$$D \cap C_1 = [(0, 1), (1, 0)], \quad D \cap C_2 = \{(1, 1)\}.$$



5. Maximum de f_Λ sous la contrainte C_k .

La fonction est continue et $D \cap C_k$ est fermé borné et non vide : il contient $z = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, avec k coordonnées égales à 1. Le théorème des bornes atteintes garantit un maximum. Pour tout $x \in D \cap C_k$,

$$\sum_{i=1}^k (1 - x_i) = \sum_{i=k+1}^n x_i.$$

En utilisant $\lambda_i \geq \lambda_k$ pour $i \leq k$ et $\lambda_i \leq \lambda_k$ pour $i > k$, même lorsque les valeurs propres sont négatives,

$$\begin{aligned} f_\Lambda(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i &= - \sum_{i=1}^k \lambda_i (1 - x_i) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i \\ &\leq -\lambda_k \sum_{i=1}^k (1 - x_i) + \lambda_k \sum_{i=k+1}^n x_i = 0. \end{aligned}$$

L'égalité est réalisée en z . Pour $k = n$, les sommes portant sur $i > k$ sont vides et le même raisonnement s'applique. Ainsi

$$\max_{D \cap C_k} f_\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \quad z = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0) \text{ maximise } f_\Lambda.$$

L'hypothèse que Λ n'est pas constant n'est pas nécessaire pour cette preuve.

6. Projections, rang et coefficients diagonaux.

- a) Puisque $\pi^2 = \pi$, tout x se décompose en $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$, avec $\pi(x) \in \text{Im } \pi$ et $x - \pi(x) \in \text{Ker } \pi$. Un vecteur de leur intersection est à la fois fixé et annulé par π , donc nul. Ainsi $\mathbb{R}^n = \text{Im } \pi \oplus \text{Ker } \pi$. Dans une base adaptée, la matrice est $J = \text{diag}(I_s, 0)$, où $s = \dim \text{Im } \pi$; il existe H inversible tel que $P = H J H^{-1}$. Pour deux matrices rectangulaires compatibles U, V , la somme finie des coefficients donne

$$\text{Tr}(UV) = \sum_i \sum_j u_{i,j} v_{j,i} = \sum_j \sum_i v_{j,i} u_{i,j} = \text{Tr}(VU).$$

Donc $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(H J H^{-1}) = \text{Tr}(J H^{-1} H) = \text{Tr}(J) = s$, et

$$\text{rg}(P) = \text{Tr}(P).$$

- b) Pour une projection orthogonale, $\pi(x)$ et $x - \pi(x)$ sont orthogonaux. Pythagore donne $\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2$; ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\pi(x)\| \leq \|x\|.$$

- c) Pour le i -ème vecteur e_i de la base canonique,

$$p_{i,i} = \langle e_i, \pi(e_i) \rangle = \langle \pi(e_i), \pi(e_i) \rangle = \|\pi(e_i)\|^2.$$

La norme de e_i est 1 et b) donne

$$\forall i, \quad 0 \leq p_{i,i} \leq 1.$$

7. Diagonalisation orthogonale de la matrice symétrique A .

Le théorème spectral fournit une base orthonormée de vecteurs propres. On ordonne ces vecteurs selon les valeurs propres décroissantes et on les place dans les colonnes $V_1, \dots, V_n$ de Q . Alors

$$A = QD^tQ, \quad {}^tQQ = Q^tQ = I_n, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

8. Produit ${}^tMM$.

Son coefficient (i, j) est $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$, puisque les colonnes sont orthonormées. Donc

$${}^tMM = I_k.$$

9. Cas d'une seule valeur propre.

Si toutes les valeurs propres valent λ_1 , alors $A = Q(\lambda_1 I_n)^tQ = \lambda_1 I_n$. Ainsi

$$\text{Tr}({}^tMAM) = \text{Tr}(\lambda_1 {}^tMM) = k\lambda_1.$$

Cette valeur ne dépend pas de M ; tout choix admissible est maximal.

10. Optimisation dans le cas général.

- a) Avec $X = {}^tQM$, on a ${}^tXX = {}^tMQ^tQM = I_k$. Donc $P^2 = X({}^tXX)^tX = P$ et ${}^tP = P$. Pour préciser le caractère orthogonal, si $u = Pz$ et $v \in \text{Ker } P$, $\langle u, v \rangle = \langle z, Pv \rangle = 0$.

$$P = X^tX \text{ représente la projection orthogonale sur } \text{Im } X.$$

En effet, $\text{Im } P \subset \text{Im } X$ et $PX = X$ donne l'inclusion inverse.

- b) Si ${}^tXz = 0$, alors $Pz = 0$. Réciproquement, si $Pz = 0$,

$$0 = {}^t_zPz = {}^t_zX^tXz = \|{}^tXz\|^2,$$

donc ${}^tXz = 0$. L'identité ${}^tXX = I_k$ montre que ${}^tX : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est surjective. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}({}^tX) = n - k$, puis

$$\text{Ker } P = \text{Ker}({}^tX), \quad \text{rg}(P) = k.$$

- c) Comme $M = QX$, on obtient ${}^tMAM = {}^tXDX$. La relation de trace établie en 6.a), appliquée aux produits compatibles, donne

$$\text{Tr}({}^tXDX) = \text{Tr}(X^tXD) = \text{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{i,i}.$$

Les questions 6.a) et 6.c) donnent $p_{i,i} \in [0, 1]$ et $\sum_i p_{i,i} = \text{Tr}(P) = k$; ce vecteur appartient donc à $D \cap C_k$.

$$\text{Tr}({}^tMAM) = \text{Tr}(PD) \leq \max_{D \cap C_k} f_\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

- d) Si $C_i = V_i$ pour $1 \leq i \leq k$, les colonnes de $X = {}^tQM$ sont les k premiers vecteurs canoniques. Ainsi $P = \text{diag}(I_k, 0)$ et l'inégalité devient une égalité :

$$\max_{{}^tMM=I_k} \text{Tr}({}^tMAM) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k, \quad M = (V_1 \dots V_k) \text{ convient.}$$

- e) Pour $n = 2$ et $k = 1$, la colonne $M = (x, y)^t / \sqrt{x^2 + y^2}$ donne $\text{Tr}({}^tMAM) = \varphi(x, y)$. La plus grande valeur propre est 2, et son espace propre est $\text{Vect}((1, 1))$. On retrouve

$$\max \varphi = 2 \text{ exactement dans les directions } (1, 1).$$

Problème 2 – Marche aléatoire et premier passage positif

Problème 2 – Séries de probabilités et temps de passage

Les incréments X_n , indépendants et de même loi, valent -1 ou 1 avec probabilité $1/2$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Le temps T est le premier rang où $S_n > 0$, avec la valeur -1 lorsqu'un tel rang n'existe pas.

Corrigé – Problème 2.

Partie I – Résultats préliminaires

1. La fonction G_W .

On utilise uniquement la définition du sujet $G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(W = n)t^n$; on n'invoque pas de propriété générale de telles fonctions. La variable W peut prendre certaines valeurs négatives : on ne suppose donc pas $G_W(1) = 1$. On convient que le terme de rang 0 vaut $\mathbb{P}(W = 0)$, même pour $t = 0$.

- a) Pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \mathbb{P}(W = n)t^n \leq \mathbb{P}(W = n)$, et $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(W = n) = \mathbb{P}(W \geq 0) \leq 1$. La comparaison de séries à termes positifs donne

$$G_W \text{ est définie sur } [0, 1], \quad 0 \leq G_W(t) \leq 1.$$

- b) Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, alors $s^n \leq t^n$ pour tout n . L'inégalité se transmet aux sommes partielles, puis à leurs limites :

$$G_W(s) \leq G_W(t) : G_W \text{ est croissante.}$$

- c) La fonction est croissante et majorée par 1. Le théorème de la limite monotone donne

$$\exists \ell \in [0, 1], \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = \ell.$$

- d) La positivité des termes et la croissance donnent, pour $m \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^m \mathbb{P}(W = n)t^n \leq G_W(t) \leq G_W(1).$$

La somme de gauche est finie et continue en 1. En faisant tendre t vers 1^- ,

$$\sum_{n=0}^m \mathbb{P}(W = n) \leq \ell \leq G_W(1).$$

- e) En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la dernière inégalité, on obtient $G_W(1) \leq \ell \leq G_W(1)$. Ainsi

$$\ell = G_W(1), \quad G_W \text{ est continue en } 1.$$

Cette preuve n'intervient aucune limite et aucune somme infinie.

- f) Pour $t = 0$, seul le terme $n = 1$ peut être non nul, et la somme vaut $\mathbb{P}(W = 1)$. Fixons maintenant $0 < t < 1$. Les croissances comparées donnent $n^3 t^{n-1} \rightarrow 0$; il existe donc N tel que, pour $n \geq N$,

$$0 \leq n \mathbb{P}(W = n)t^{n-1} \leq n t^{n-1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann de paramètre 2 converge. Par comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(W = n) t^{n-1} \text{ converge pour tout } 0 \leq t < 1.$$

Dans la suite, la dérivabilité de G_W et la formule de sa dérivée sont utilisées comme résultats admis par l'énoncé.

2. Une infinité de réalisations d'événements indépendants.

- a) Posons $g(x) = e^{-x} - 1 + x$. On a $g'(x) = 1 - e^{-x}$, négatif pour $x < 0$ et positif pour $x > 0$. Son minimum vaut $g(0) = 0$; ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}.$$

- b) L'indépendance des événements, puis celle de leurs complémentaires, donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) &= 1 - \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\geq 1 - \prod_{k=n}^m e^{-\mathbb{P}(A_k)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right).$$

- c) Si la série diverge, pour n fixé sa somme de n à m tend vers $+\infty$. Le théorème de la limite monotone pour la suite croissante des événements $\bigcup_{k=n}^m A_k$ donne $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k) = 1$. Les événements $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$ forment ensuite une suite décroissante. Le même théorème donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1.$$

3. Égalité des lois de deux vecteurs de sommes.

L'événement $U_n = (j_1, \dots, j_n)$ est équivalent à

$$W_1 = j_1, \quad W_2 = j_2 - j_1, \dots, \quad W_n = j_n - j_{n-1}.$$

Pour $V_{n,k}$, les mêmes égalités portent sur $W_k, \dots, W_{k+n-1}$. L'indépendance et l'égalité des lois de ces variables donnent

$$\mathbb{P}(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = \mathbb{P}(W_1 = j_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(W_i = j_i - j_{i-1}) = \mathbb{P}(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)).$$

L'égalité reste valable si certaines valeurs ne sont pas possibles : le facteur correspondant est alors nul.

4. Produit de deux sommes de séries positives.

a) Posons $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$. En développant une somme finie,

$$C_n = \sum_{\substack{i \geq 1, j \geq 0 \\ i+j \leq n}} a_i b_j.$$

Les couples de cette somme appartiennent au rectangle $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$, lui-même inclus dans l'ensemble $i \geq 1, j \geq 0, i + j \leq 2n$. Tous les termes sont positifs ou nuls ; ainsi

$$C_n \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) \leq C_{2n}.$$

b) Si les deux séries ont pour sommes A et B , alors $0 \leq C_n \leq AB$. La suite (C_n) est croissante, donc converge par le théorème de la limite monotone ; notons C sa limite. Les trois expressions en a) ont respectivement pour limites C , AB et C . Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Partie II – Une marche aléatoire

5. Espérances et variances.

a) X_n est bornée et ses moments existent. $\mathbb{E}(X_n) = (-1)/2 + 1/2 = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$, d'où

$$\mathbb{E}(X_n) = 0, \quad \mathbb{V}(X_n) = 1.$$

b) Par linéarité de l'espérance et additivité des variances de variables indépendantes,

$$\mathbb{E}(S_n) = 0, \quad \mathbb{V}(S_n) = n.$$

6. Convergence en probabilité de S_n/n .

Pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

C'est la définition de la convergence en probabilité :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

7. Simulations de X_1 et S_n .

a) Un tirage de Bernoulli de paramètre $1/2$ est transformé en -1 ou 1 :

```
def simul_X():
    return 2 * rd.binomial(1, 0.5) - 1
```

$$\text{simul_X() simule } X_1.$$

b) On additionne n tirages indépendants ; pour $n = 0$, la boucle est vide.

```
def simul_S(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + simul_X()
    return S
```

$$\boxed{\text{simul_S}(n) \text{ simule } S_n \quad (n \geq 0).}$$

8. Écriture à l'aide de variables de Bernoulli.

Pour $B_k = (X_k + 1)/2$, on a $B_k = 1$ si $X_k = 1$ et $B_k = 0$ sinon. Donc B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$; ces variables sont indépendantes car elles sont des fonctions des X_k indépendantes.

$$\boxed{B_k \sim \mathcal{B}(1, 1/2), \quad S_n = 2 \sum_{k=1}^n B_k - n.}$$

L'identité s'obtient en développant la somme et vaut aussi pour $n = 0$.

9. Loi de S_n .

a) $S_n + n = 2 \sum_{k=1}^n B_k$ est un entier pair. Par conséquent

$$\boxed{i \not\equiv n \pmod{2} \implies \mathbb{P}(S_n = i) = 0.}$$

b) La somme des B_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Si i et n ont la même parité, $(n+i)/2$ est un entier de 0 à n et

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = i) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n B_k = \frac{n+i}{2}\right) = \binom{n}{(n+i)/2} 2^{-n}.}$$

10. Probabilités de retour et retours successifs.

a) La question précédente donne $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = (2n)!/(n!^2 4^n)$. Avec la formule de Stirling admise,

$$\frac{(2n)!}{n!^2 4^n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} (2n/e)^{2n}}{2\pi n (n/e)^{2n} 4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

La notation $a_n \sim b_n$ signifie ici $a_n/b_n \rightarrow 1$.

b) **Difficulté de l'énoncé.** Les événements $[S_{2n} = 0]$ ne sont pas indépendants. Par exemple,

$$\mathbb{P}(S_2 = 0, S_4 = 0) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(S_2 = 0)\mathbb{P}(S_4 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}.$$

La question 2.c) ne peut donc pas leur être appliquée directement. Voici une preuve du résultat annoncé utilisant seulement des décompositions finies et l'indépendance des incréments.

Notons $u_m = \mathbb{P}(S_m = 0)$, avec $u_0 = 1$, et

$$F_k = [S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0], \quad f_k = \mathbb{P}(F_k), \quad q = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \leq 1.$$

Pour $m \geq 1$, les événements $F_k \cap [S_m = 0]$, $1 \leq k \leq m$, forment une réunion disjointe égale à $[S_m = 0]$. Sur F_k , $S_k = 0$; les incréments suivants sont indépendants de F_k . La question 3 donne donc

$$u_m = \sum_{k=1}^m f_k u_{m-k}.$$

Posons $U_N = \sum_{m=0}^N u_m$. En sommant cette identité finie,

$$U_N = 1 + \sum_{k=1}^N f_k \sum_{j=0}^{N-k} u_j \leq 1 + qU_N.$$

Si $q < 1$, alors $U_N \leq 1/(1-q)$ pour tout N . Or a) et la divergence de $\sum n^{-1/2}$ donnent $\sum_{m \geq 0} u_m = +\infty$, donc $U_N \rightarrow +\infty$. C'est une contradiction ; ainsi $q = 1$: un premier retour existe avec probabilité 1.

Pour passer aux retours successifs, notons τ_j le rang du j -ème retour, avec la valeur $+\infty$ s'il n'existe pas. Sur $[\tau_j = m]$, les m premiers incréments fixent ce rang et les incréments suivants sont indépendants de cet événement. Pour un entier $L \geq 1$, la probabilité d'un nouveau retour pendant les L pas suivants est $\sum_{k=1}^L f_k$. En faisant tendre L vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone pour les événements donne

$$\mathbb{P}(\tau_j = m, \tau_{j+1} < +\infty) = \mathbb{P}(\tau_j = m)q = \mathbb{P}(\tau_j = m).$$

En sommant sur $m \geq 1$, on obtient par récurrence $\mathbb{P}(\tau_j < +\infty) = 1$ pour tout j . Les événements $[\tau_j < +\infty]$ décroissent avec j ; une dernière application du théorème de la limite monotone donne

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{la marche retourne une infinité de fois en } 0) = 1.}$$

11. Premières propriétés de T .

a) $[T = 1] = [X_1 = 1]$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2}.}$$

b) Avant le premier passage positif, $S_j \leq 0$. Le dernier incrément vaut au plus 1, donc le premier niveau strictement positif est nécessairement 1. Réciproquement, atteindre 1 après des positions toutes non positives réalise bien le premier passage. Ainsi

$$\boxed{[T = n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leq 0] \right) \cap [S_n = 1].}$$

c) La question 9.a) montre que $S_n = 1$ est impossible si n est pair. La valeur 0 de T est exclue par définition. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ pair}, \quad \mathbb{P}(T = n) = 0.}$$

12. Décomposition d'une excursion négative.

- a) L'événement R_k signifie que le premier pas mène en -1 , que la marche reste strictement négative jusqu'au rang k inclus, et qu'elle revient pour la première fois à 0 au rang $k + 1$.

R_k : premier retour en 0 au rang $k + 1$, après un premier pas négatif.

- b) Sous $[X_1 = -1]$, posons $W_j = X_2 + \dots + X_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq k$. Alors $S_{j+1} = -1 + W_j$, et R_k impose $W_j \leq 0$ pour $j < k$ et $W_k = 1$. Les incréments $X_2, \dots, X_{k+1}$ sont indépendants de X_1 et ont la même loi que les premiers incréments. Les questions 3 et 11 donnent

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T = k).$$

Pour $k = 1$, la condition intermédiaire est vide et le raisonnement reste valable.

- c) Pour réaliser $T = n + 1 > 1$, le premier pas est nécessairement négatif. La marche doit revenir à 0 avant d'atteindre 1 . Son premier retour est à un unique rang $k + 1$, avec $1 \leq k \leq n - 1$. Après ce retour, les positions relatives restent non positives jusqu'au rang n et valent 1 au rang $n + 1$. Ces cas sont disjoints. Donc

$$\mathbb{P}(T = n + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_k \cap \bigcap_{j=k+2}^n [S_j - S_{k+1} \leq 0] \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1]\right).$$

Pour $n = 1$, la somme est vide et $\mathbb{P}(T = 2) = 0$, comme en 11.c).

- d) R_k dépend des incréments jusqu'au rang $k + 1$, tandis que le second événement dépend des incréments de $k + 2$ à $n + 1$. Ils sont indépendants. La question 3 identifie la probabilité du second événement à $\mathbb{P}(T = n - k)$. Avec b),

$$\mathbb{P}(T = n + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n - k).$$

Le terme ajouté pour $k = n$ vaut 0 , car $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.

13. Équation vérifiée par G_T .

Écrivons $p_j = \mathbb{P}(T = j)$ pour $j \geq 0$. Alors $p_0 = 0$ et $G_T(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j t^j$.

- a) Pour $t \in [0, 1]$, les séries positives de termes $a_k = p_k t^k$, $k \geq 1$, et $b_j = p_j t^j$, $j \geq 0$, convergent d'après la question 1.a). La question 4.b) leur est applicable et donne

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n p_k p_{n-k} \right) t^n.$$

- b) La question 12.d) transforme le coefficient intérieur en $2p_{n+1}$. Puisque $p_1 = 1/2$, un décalage d'indice donne

$$tG_T(t)^2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n+1} t^{n+1} = 2(G_T(t) - p_1 t).$$

D'où

$$tG_T(t)^2 = 2G_T(t) - t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

- c) Pour $t = 1$, l'identité donne $(G_T(1) - 1)^2 = 0$. Les seules valeurs possibles de T sont -1 et les entiers strictement positifs. Par conséquent

$$G_T(1) = 1, \quad \mathbb{P}(T = -1) = 1 - G_T(1) = 0.$$

- d) Pour $0 < t < 1$, les deux solutions de l'équation quadratique sont $(1 \pm \sqrt{1 - t^2})/t$. La solution avec le signe $+$ est supérieure à 1, tandis que $G_T(t) \leq 1$. Ainsi

$$G_T(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t} = \frac{t}{1 + \sqrt{1 - t^2}}, \quad G_T(t) \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 1^-).$$

La dérivabilité est admise en 1.f). En dérivant l'identité de b),

$$G_T(t)^2 + 2tG_T(t)G'_T(t) = 2G'_T(t) - 1, \quad G'_T(t) = \frac{1 + G_T(t)^2}{2(1 - tG_T(t))}.$$

Or $1 - tG_T(t) = \sqrt{1 - t^2} > 0$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Donc

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} G'_T(t) = +\infty.$$

14. Simulation de T et conjecture sur son espérance.

- a) On additionne les pas tant que la position reste non positive :

```
def simul_T():
    S = 0
    n = 0
    while S <= 0:
        S = S + simul_X()
        n = n + 1
    return n
```

La question 13.c) garantit la terminaison avec probabilité 1. Sur l'événement de probabilité nulle où aucun passage n'existe, aucun rang fini ne permettrait de le détecter ; la boucle ne termine pas.

`simul_T()` renvoie une simulation du premier passage positif.

- b) La fonction `mystere(N)` effectue N simulations indépendantes et renvoie leur moyenne arithmétique. Les sept moyennes affichées, toutes calculées avec $N = 1000$, fluctuent fortement et peuvent être très grandes. Elles suggèrent la conjecture

T n'admet pas d'espérance finie.

Ces seules simulations ne constituent pas une preuve.

- c) La conjecture suggérée est que l'existence d'une espérance finie impose une limite finie pour $G'_T(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$. On peut ici la confirmer : si $\mathbb{E}(T)$ était finie, puisque $\mathbb{P}(T = -1) = 0$, la formule admise en 1.f) donnerait

$$0 \leq G'_T(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T = j)t^{j-1} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T = j) = \mathbb{E}(T), \quad 0 \leq t < 1.$$

Ce majorant fini contredirait la question 13.d). Ainsi

T n'admet pas d'espérance finie, $\lim_{t \rightarrow 1^-} G'_T(t) = +\infty$.