

Année : 2026

École : EML

Option : Mathématiques approfondies

Sommaire

Problème 1 **1**

Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

Problème 2 **4**

Thèmes abordés : Suites ; séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python

Problème 1

Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé et $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme associée, notée $\| \cdot \|$. On utilise les mêmes notations pour le produit scalaire et la norme usuels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la trace de A est définie par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Partie I – Un exemple

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$ et où la matrice A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note S_1 le cercle unité du plan $\mathbb{R}^2$, défini par $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$. On admet que S_1 est un fermé borné.

- 1) Déterminer une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant, telles que $A = QD^tQ$.

On introduit alors la fonction φ définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

- 2) a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \varphi(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- b) Montrer que φ admet une infinité de points critiques et les expliciter.
- c) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $\varphi(\alpha x, \alpha y) = \varphi(x, y)$.
- d) En déduire que φ présente un maximum global sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, puis préciser sa valeur et où ce maximum est atteint.

Partie II – Une inégalité sur la trace

- 3) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ un entier et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice non nécessairement carrée.

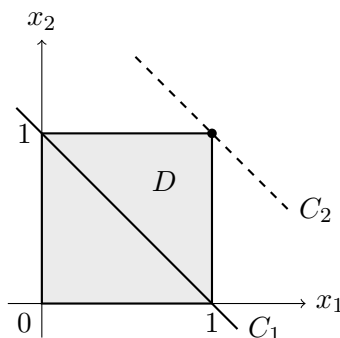
- a) Expliciter, en fonction des coefficients de B , les coefficients des matrices tBB et $B{}^tB$.
 b) En déduire que $\text{Tr}({}^tBB) = \text{Tr}(B{}^tB)$.

On note $D = [0, 1]^n$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$C_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = k \right\}.$$

On admet que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les ensembles D et $D \cap C_k$ sont des ensembles fermés et bornés.

- 4) Représenter graphiquement, pour $n = 2$, les ensembles D , C_1 et C_2 .



Soit $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. On considère la fonction f_Λ définie sur D par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \quad f_\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

- 5) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que $\Lambda \notin \text{Vect}((1, 1, \dots, 1))$. Montrer que f_Λ admet un maximum global sur D sous la contrainte C_k . Expliciter un point en lequel ce maximum est atteint.
- 6) Soit π une projection de $\mathbb{R}^n$ dont on note $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dans la base canonique.
- a) Montrer que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)$.
 On pourra commencer par écrire $\mathbb{R}^n = F \oplus G$, pour F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ à expliciter, et déterminer la matrice de π dans une base adaptée à cette décomposition.
- b) Montrer que, si π est orthogonale, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\pi(x)\| \leq \|x\|$.
- c) Dédire de la question précédente que, si π est orthogonale, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_{i,i} \in [0, 1]$.

Soient $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de rang r . On fixe alors un entier $k \leq r$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes $C_1, \dots, C_k$ forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à choisir M de sorte à rendre maximale la quantité $\text{Tr}({}^tMAM)$.

- 7) Justifier qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ telles que

$$A = QD^tQ.$$

On notera dans la suite $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $V_1, V_2, \dots, V_n$ les colonnes de Q .

- 8) Calculer tMM .
- 9) On suppose dans cette question, et dans cette question uniquement, que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \lambda_1$, c'est-à-dire que $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1\}$. Que dire de $\text{Tr}({}^tMAM)$ dans ce cas ?
- 10) On suppose dans la suite que A admet au moins deux valeurs propres distinctes. On pose alors $X = {}^tQM \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $P = X^tX$.
- a) Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(P) = \text{Ker}({}^tX)$. En déduire que $\text{rg}(P) = k$.
 - c) Montrer que $\text{Tr}({}^tMAM) = \text{Tr}(PD)$.
En déduire que

$$\text{Tr}({}^tMAM) \leq \max\{f_\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \cap C_k\}.$$

- d) Conclure que, si pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $C_i = V_i$, alors la quantité $\text{Tr}({}^tMAM)$ est maximale.
- e) Commenter alors le résultat obtenu à la Question 2.d.

L'optimisation des inégalités de trace trouve des applications dans des problèmes d'analyse de données (appelés problèmes de régression) ou autres problèmes d'approximation matricielle.

Problème 2

Thèmes abordés : Suites ; séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python

Dans tout le problème, on considère que les variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. Si Y est une variable aléatoire définie sur Ω , on note respectivement (en cas d'existence) $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ l'espérance et la variance de Y .

Partie I – Des résultats préliminaires

Les quatre questions de cette partie sont indépendantes. On démontre, dans chacune de ces questions, un résultat qui sera utilisé dans la Partie 2. On pourra, si besoin, admettre ces résultats.

- 1) Soit W une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction G_W , définie sur $[0, 1]$, par

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(W = n)t^n.$$

- a) Justifier que G_W est bien définie sur $[0, 1]$.
- b) Montrer que G_W est croissante sur $[0, 1]$.
- c) En déduire l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = \ell$.
- d) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(W = n)t^n \leq G_W(t) \leq G_W(1),$$

puis que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(W = n) \leq \ell \leq G_W(1).$$

- e) En déduire que G_W est continue en 1.
- f) Justifier que, pour tout $t \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(W = n)t^{n-1}$ est convergente.

On admet que G_W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et que, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$G'_W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(W = n)t^{n-1}.$$

- 2) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

- a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - x \leq \exp(-x)$.
- b) Montrer que, pour tous entiers m, n vérifiant $1 \leq n \leq m$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right).$$

- c) On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1.$$

On vient de montrer que dans le cas où la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors la probabilité qu'une infinité de ces événements se réalisent simultanément est égale à 1.

- 3) Soit $(W_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les vecteurs aléatoires U_n et $V_{n,k}$ définis par

$$U_n = \left(W_1, W_1 + W_2, \dots, \sum_{i=1}^n W_i\right), \quad V_{n,k} = \left(W_k, W_k + W_{k+1}, \dots, \sum_{i=k}^{n-1+k} W_i\right).$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{P}(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = \mathbb{P}(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)).$$

On admet qu'on vient de montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, U_n et $V_{n,k}$ sont des vecteurs aléatoires de même loi.

- 4) On considère deux séries convergentes, à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{on pose } c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=0}^n b_j\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

- b) En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} c_k$ et qu'on a de plus

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right).$$

Partie II – Une marche aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi, telles que, pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On introduit alors $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est appelée marche aléatoire ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n prend pour valeur la position (sur un axe gradué) d'un marcheur après n déplacements aléatoires vers la gauche ou vers la droite en partant de l'origine.

- 5) a) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
 b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
- 6) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine dont on précisera la valeur.

7) **Simulations sous Python.**

- a) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_X()` : qui renvoie une simulation de X_1 .
 b) En déduire l'écriture d'une fonction d'en-tête `def simul_S(n)` : qui prend un argument n entier et renvoie une simulation de S_n .
- 8) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} - n.$$

Quelle est la loi suivie, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par la variable aléatoire $\frac{X_k + 1}{2}$?

- 9) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket -n, n \rrbracket$.
 a) Justifier que, si i et n n'ont pas la même parité, alors $\mathbb{P}(S_n = i) = 0$.
 b) Montrer que, si i a la même parité que n , alors

$$\mathbb{P}(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- 10) On admet la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

- a) Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
 b) Conclure, à l'aide de la Question 2.c, que, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0.

On note T la variable aléatoire qui vaut -1 si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[S_n \leq 0]$ est réalisé, ou sinon, qui prend la valeur du plus petit entier $n \geq 1$ pour lequel $[S_n > 0]$ est réalisé. En particulier, $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.

- 11) a) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$.
 b) Soit $n \geq 2$. Expliquer de manière succincte l'égalité

$$[T = n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leq 0] \right) \cap [S_n = 1].$$

- c) Montrer que, pour tout entier naturel n pair, $\mathbb{P}(T = n) = 0$.

12) On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement

$$R_k = [S_1 = -1] \cap \left(\bigcap_{j=2}^k [S_j \leq -1] \right) \cap [S_{k+1} = 0].$$

a) Expliquer par une phrase claire et rigoureuse ce que signifie la réalisation de l'évènement R_k .

b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(T = k).$$

On pourra utiliser le résultat de la Question 3.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} \left(R_k \cap \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - S_{k+1} \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1] \right).$$

d) Obtenir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(T = n - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(T = n - k).$$

13) a) Montrer, à l'aide de la question précédente et de la Question 4.b, que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(T = n - k) \right) t^n,$$

où G_T désigne la fonction associée à T comme dans la Question 1 de la Partie I.

b) Montrer alors que, pour tout $t \in [0, 1]$, $t G_T(t)^2 = 2 G_T(t) - t$.

c) En déduire que $G_T(1) = 1$ puis que $\mathbb{P}(T = -1) = 0$.

On vient de montrer que, presque sûrement, il existe un entier n tel que $[S_n = 1]$ est réalisé.

d) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} G'_T(t) = +\infty$.

14) Simulations sous Python.

a) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_T()` : qui renvoie une simulation de T .

b) On ajoute les commandes ci-dessous dont l'exécution permet l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer à propos de T ? (*On commencera par préciser ce que fait la fonction `mystere`.*)

```
def mystere(N):
    ech = np.zeros(N)
    for k in range(N):
        ech[k] = simul_T()
    return np.mean(ech)

for k in range(7):
    print(mystere(1000))
```

Affichage Python

```
> > >
67.88
1246.38
285.62
8181.62
31.36
4394.42
117.58
```


- c) Émettre une conjecture sur le lien entre l'existence éventuelle de l'espérance de T et les propriétés de la fonction G_T .

FIN