

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II – Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2026

La numérotation des questions et des sous-questions est celle du sujet fourni. On conserve les notations F_X , $F_{(X,Y)}$ et $\mathcal{F}_{(a,b)}$ de l'énoncé. Pour une fonction H de deux variables, on note

$$\Delta_H(a_1, a_2; b_1, b_2) = H(b_1, b_2) - H(a_1, b_2) - H(b_1, a_2) + H(a_1, a_2).$$

La propriété de 2-croissance signifie que cet accroissement est positif ou nul pour $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$.

Notations, rappels et préliminaires

Préliminaires – Inverses des fonctions de répartition

Une fonction de $\mathcal{F}_{(a,b)}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]a, b[$, avec limites 0 en a et 1 en b . Questions 1 et 2.

Corrigé – Préliminaires.

1. Bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.

Soit $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$. Pour $x \in]a, b[$, choisissons $r, s \in]a, b[$ tels que $r < x < s$. La stricte croissance et les valeurs de g dans $[0, 1]$ donnent $0 \leq g(r) < g(x) < g(s) \leq 1$; ainsi $g(x) \in]0, 1[$. La restriction de g est injective par stricte croissance.

Pour $u \in]0, 1[$, les limites aux extrémités permettent de choisir $r < s$ dans $]a, b[$ tels que $g(r) < u < g(s)$. La continuité et le théorème des valeurs intermédiaires donnent un $x \in]r, s[$ tel que $g(x) = u$; l'injectivité assure son unicité.

$$g|_{]a,b[} :]a, b[\longrightarrow]0, 1[\text{ est une bijection strictement croissante.}$$

Sa réciproque g^{-1} est elle aussi strictement croissante : si $u < v$, l'inégalité $g^{-1}(u) \geq g^{-1}(v)$ contredirait la croissance de g et les égalités $g(g^{-1}(u)) = u$, $g(g^{-1}(v)) = v$.

Conséquence utilisée dans la suite. Si a est fini, la continuité donne $g(a) = 0$ et la croissance impose $g(x) = 0$ pour $x \leq a$. Si b est fini, de même, $g(x) = 1$ pour $x \geq b$. En particulier, $g(z) \in]0, 1[$ si et seulement si $z \in]a, b[$. Pour tout $u \in]0, 1[$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$g(z) \leq u \iff z \leq g^{-1}(u).$$

Cette équivalence suit de la stricte croissance sur $]a, b[$ et des valeurs constantes éventuelles en dehors de cet intervalle.

2. Fonction de répartition associée à une densité strictement positive.

Puisque X possède une densité f , F_X est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$. Sur $]a, b[$, la continuité de f et le théorème fondamental du calcul intégral donnent

$F'_X = f$, donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$. Si $a < x < y < b$, alors

$$F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y f(t) dt > 0,$$

car f est continue et strictement positive sur $[x, y]$. La fonction F_X est donc strictement croissante sur $]a, b[$.

Comme f est nulle en dehors de $]a, b[$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1, les propriétés des intégrales impropres assurent

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} F_X(x) = 1,$$

avec la lecture $x \rightarrow -\infty$ si $a = -\infty$, et $x \rightarrow +\infty$ si $b = +\infty$.

$$F_X \in \mathcal{F}_{(a,b)}.$$

Partie I – Répartition d'un couple : propriétés et exemples

Partie I – Bornes de Fréchet–Hoeffding et dépendance extrême

On étudie $F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$, puis les deux cas où elle atteint l'une des bornes de Fréchet–Hoeffding. Questions 3 à 17.

Corrigé – Partie I.

3. Limites lorsque l'une des coordonnées tend vers $-\infty$.

L'inclusion $[X \leq t] \cap [Y \leq y] \subset [X \leq t]$ donne

$$0 \leq F_{(X,Y)}(t, y) \leq F_X(t).$$

Comme $F_X(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, le théorème d'encadrement conclut. De même, $0 \leq F_{(X,Y)}(x, t) \leq F_Y(t) \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(x, t) = 0.$$

4. Limite selon la seconde coordonnée.

a) Pour chaque $\omega \in \Omega$, $Y(\omega)$ est un réel. Il existe donc un entier naturel n tel que $Y(\omega) \leq n$. Par conséquent,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]) = [X \leq x].$$

En prenant les probabilités,

$$F_X(x) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]) \right).$$

- b) Les événements $A_n = [X \leq x] \cap [Y \leq n]$ sont croissants. Le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, n) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = F_X(x).$$

De plus, pour $r \geq n$, l'inclusion des événements donne

$$F_{(X,Y)}(x, n) \leq F_{(X,Y)}(x, r) \leq F_X(x).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir n tel que le terme de gauche soit supérieur à $F_X(x) - \varepsilon$; le même encadrement vaut alors pour tout $r \geq n$. Ainsi

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, r) = F_X(x).$$

5. Limite selon la première coordonnée.

Les événements $B_n = [X \leq n] \cap [Y \leq y]$ sont croissants et leur réunion vaut $[Y \leq y]$, car X est à valeurs réelles. Le théorème de la limite monotone donne $F_{(X,Y)}(n, y) \rightarrow F_Y(y)$. Pour $t \geq n$, on a $F_{(X,Y)}(n, y) \leq F_{(X,Y)}(t, y) \leq F_Y(y)$, d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = F_Y(y).$$

6. Limites successives.

Les questions 4 et 5 identifient séparément les limites intérieures. On calcule donc, dans chaque cas, la limite extérieure d'une fonction de répartition :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} F_Y(r) = 1. \end{aligned}$$

7. 2-croissance d'une fonction de répartition de couple.

Pour $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, les différences d'événements donnent successivement

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2) &= \mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2), \\ F_{(X,Y)}(b_1, a_2) - F_{(X,Y)}(a_1, a_2) &= \mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, Y \leq a_2). \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde égalité à la première,

$$\Delta_{F_{(X,Y)}}(a_1, a_2; b_1, b_2) = \mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \geq 0.$$

Ainsi $F_{(X,Y)}$ est 2-croissante.

8. Bornes de Fréchet–Hoeffding.

Posons $A = [X \leq x]$ et $B = [Y \leq y]$.

- a) Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$,

$$F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y)).$$

b) La formule de la probabilité d'une réunion donne

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq F_X(x) + F_Y(y) - 1.$$

En tenant compte de $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$,

$$F_{(X,Y)}(x, y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0).$$

9. Marginales dans le premier exemple.

On suppose $F_{(X,Y)}(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y))$. Les fonctions F_1 et F_2 ont pour limite 1 en $+\infty$ (par leur définition, et par leurs valeurs constantes à droite lorsque l'extrémité supérieure est finie). Par les questions 4 et 5,

$$F_X(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \min(F_1(x), F_2(r)) = F_1(x),$$

et, de même, $F_Y(y) = F_2(y)$.

$$F_X = F_1, \quad F_Y = F_2.$$

10. Transformation en variables uniformes et égalité presque sûre.

On pose $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$.

a) Pour $u \in]0, 1[$, la question 1 donne l'égalité d'événements $[F_1(X) \leq u] = [X \leq F_1^{-1}(u)]$. Ainsi

$$\mathbb{P}(U \leq u) = F_X(F_1^{-1}(u)) = F_1(F_1^{-1}(u)) = u.$$

Comme U est à valeurs dans $[0, 1]$, sa fonction de répartition est nulle pour $u < 0$ et égale à 1 pour $u \geq 1$. En 0, pour tout $s \in]0, 1[$, $0 \leq \mathbb{P}(U \leq 0) \leq \mathbb{P}(U \leq s) = s$, d'où $\mathbb{P}(U \leq 0) = 0$. Le même raisonnement s'applique à V .

$$U \sim \mathcal{U}([0, 1]), \quad V \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

Le calcul utilisé vaut plus généralement pour toute variable Z dont la fonction de répartition appartient à $\mathcal{F}_{(a,b)}$: $F_Z(Z)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. En particulier, ces variables n'ont de probabilité positive en aucun point, et $\mathbb{P}(0 < U < 1) = \mathbb{P}(0 < V < 1) = 1$.

b) Pour $u, v \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u, v) &= F_{(X,Y)}(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \\ &= \min(u, v). \end{aligned}$$

Sur toute la droite réelle, posons

$$L(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

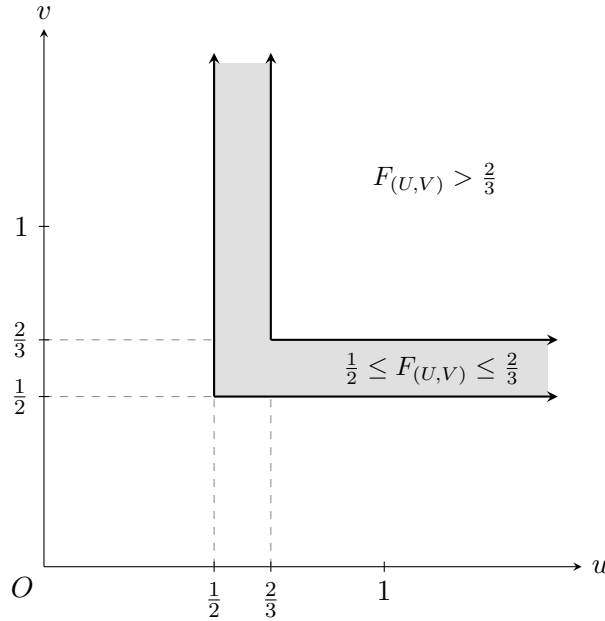
Si une coordonnée est négative ou nulle, la probabilité conjointe est nulle ; si une coordonnée est supérieure ou égale à 1, elle ne contraint plus l'événement et on retrouve l'autre marginale. Donc

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(U,V)}(u, v) = \min(L(u), L(v)).$$

- c) La condition $F_{(U,V)}(u, v) \geq 1/2$ équivaut à $u \geq 1/2$ et $v \geq 1/2$. Sous ces deux conditions, $F_{(U,V)}(u, v) \leq 2/3$ équivaut à $u \leq 2/3$ ou $v \leq 2/3$. L'ensemble demandé est donc

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \times \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\times \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right].$$

Les frontières sont incluses. Les deux bandes se prolongent respectivement vers le haut et vers la droite.



- d) Si $U - V > 1/n$, alors $U > 1/n$ puisque $V \geq 0$. Comme $U \leq 1$, il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $k/n < U \leq (k+1)/n$. On a alors

$$V < U - \frac{1}{n} \leq \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Ainsi

$$[U - V > 1/n] \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} ([k/n < U \leq (k+1)/n] \cap [V \leq k/n]).$$

La probabilité d'une réunion finie est majorée par la somme des probabilités, d'où

$$\mathbb{P}(U - V > 1/n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(k/n < U \leq (k+1)/n, V \leq k/n).$$

- e) Pour $1 \leq k \leq n-1$, la sous-question b) donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k/n < U \leq (k+1)/n, V \leq k/n) &= F_{(U,V)}((k+1)/n, k/n) - F_{(U,V)}(k/n, k/n) \\ &= k/n - k/n = 0. \end{aligned}$$

D'après d), $\mathbb{P}(U - V > 1/n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Les événements $[U - V > 1/n]$ sont croissants et leur réunion vaut $[U > V]$. Le théorème de la limite monotone donne $\mathbb{P}(U > V) = 0$, donc $\mathbb{P}(U \leq V) = 1$. La formule de b) est symétrique en u et v : en échangeant U et V , le même raisonnement donne $\mathbb{P}(V \leq U) = 1$. L'intersection de ces deux événements a donc probabilité 1.

$$\mathbb{P}(U \leq V) = 1, \quad \mathbb{P}(U = V) = 1.$$

- f) Puisque $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$, on a $F_2(Y) \in]0, 1[$ pour tout résultat de l'expérience. Sur l'événement de probabilité 1 où $F_1(X) = F_2(Y)$, la valeur $F_1(X)$ appartient donc à $]0, 1[$. La conséquence de la question 1 assure alors $X \in]a_1, b_1[$, et l'on peut appliquer F_1^{-1} :

$$X = F_1^{-1}(F_2(Y)) \quad \text{presque sûrement.}$$

11. Comonotonie.

Sur les intervalles où les variables prennent leurs valeurs, posons

$$g :]a_2, b_2[\rightarrow]a_1, b_1[, \quad g(y) = F_1^{-1}(F_2(y)),$$

$$h :]a_1, b_1[\rightarrow]a_2, b_2[, \quad h(x) = F_2^{-1}(F_1(x)).$$

Les fonctions F_1, F_2 et leurs réciproques sont strictement croissantes sur les intervalles concernés ; g et h le sont donc aussi. La question 10 f) et son analogue en échangeant les variables donnent

$$X = g(Y) \text{ ps,} \quad Y = h(X) \text{ ps,} \quad g, h \text{ croissantes.}$$

Ces fonctions sont définies sur les intervalles supports respectifs, ce qui suffit pour donner un sens aux deux égalités.

12. Simulation du premier exemple : Nuage1.

Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour la loi exponentielle de paramètre 1,

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-y}, & y > 0, \end{cases} \quad F_2^{-1}(u) = -\ln(1 - u) \quad (0 < u < 1).$$

La question 11 donne donc

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y = -\ln(1 - \Phi(X)) \text{ ps.}$$

On simule 100 valeurs de X et on applique cette relation :

```
def Nuage1():
    X = rd.normal(0, 1, 100)
    U = sp.ndtr(X)
    Y = -np.log(1 - U)
    plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')
    plt.show()
```

Le couple construit a bien la répartition conjointe attendue : $\Phi(X)$ est uniforme sur $[0, 1]$, et pour $y > 0$, $[Y \leq y] = [\Phi(X) \leq 1 - e^{-y}]$. Ainsi la probabilité conjointe est $\min(\Phi(x), 1 - e^{-y})$; pour $y \leq 0$, elle est nulle.

13. Marginales dans le second exemple.

On suppose désormais $F_{(X,Y)}(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$. En faisant tendre la seconde coordonnée vers $+\infty$,

$$F_X(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \max(F_1(x) + F_2(r) - 1, 0) = \max(F_1(x), 0) = F_1(x).$$

La limite selon la première coordonnée donne de même $F_Y = F_2$.

$$F_X = F_1, \quad F_Y = F_2.$$

14. Variables transformées dans le second exemple.

On pose $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$.

- a) Le calcul de la question 10 a) donne $U, V \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Pour $w \in [0, 1]$, la continuité de la loi uniforme donne

$$\mathbb{P}(1 - V \leq w) = \mathbb{P}(V \geq 1 - w) = 1 - \mathbb{P}(V < 1 - w) = w.$$

Donc $1 - V$ suit également la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $u, v \in]0, 1[$, les inverses donnent

$$F_{(U,V)}(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

Comme $\mathbb{P}(V = 1 - w) = 0$, pour $u, w \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} F_{(U,1-V)}(u, w) &= \mathbb{P}(U \leq u, V \geq 1 - w) \\ &= \mathbb{P}(U \leq u) - \mathbb{P}(U \leq u, V < 1 - w) \\ &= u - F_{(U,V)}(u, 1 - w) \\ &= u - \max(u - w, 0) = \min(u, w). \end{aligned}$$

En dehors du carré ouvert, on utilise les supports et les marginales uniformes, exactement comme à la question 10 b). Avec la fonction L définie à cette question,

$$\boxed{\begin{aligned} U &\sim \mathcal{U}([0, 1]), & 1 - V &\sim \mathcal{U}([0, 1]), \\ \forall (u, w) \in \mathbb{R}^2, & F_{(U,1-V)}(u, w) = \min(L(u), L(w)). \end{aligned}}$$

- b) Le couple $(U, 1 - V)$ a la même formule de répartition que le couple traité dans la question 10. Le raisonnement des sous-questions d) et e) s'applique donc et donne

$$\boxed{\mathbb{P}(U = 1 - V) = 1.}$$

- c) Si $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$, alors $1 - F_2(Y) \in]0, 1[$ pour tout résultat de l'expérience. Sur l'événement de probabilité 1 où $F_1(X) = 1 - F_2(Y)$, la valeur $F_1(X)$ est intérieure à $]0, 1[$, donc $X \in]a_1, b_1[$. En appliquant F_1^{-1} ,

$$\boxed{X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y)) \text{ presque sûrement.}}$$

15. Contra-monotonie.

Définissons sur les intervalles supports

$$g(y) = F_1^{-1}(1 - F_2(y)), \quad h(x) = F_2^{-1}(1 - F_1(x)).$$

Les fonctions $1 - F_2$ et $1 - F_1$ sont strictement décroissantes, et les réciproques sont strictement croissantes. Les fonctions g et h sont donc strictement décroissantes. La question 14 c) et son analogue en échangeant les deux variables donnent

$$\boxed{X = g(Y) \text{ ps,} \quad Y = h(X) \text{ ps,} \quad g, h \text{ décroissantes.}}$$

16. Simulation du second exemple : Nuage2.

On a $F_1(x) = \Phi(x)$ et $F_2(y) = \Phi((y - 1)/2)$. Par symétrie de la loi normale centrée réduite, $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$. La relation $F_2(Y) = 1 - F_1(X)$ et la stricte croissance de Φ entraînent $(Y - 1)/2 = -X$ presque sûrement. Ainsi

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y = 1 - 2X \text{ ps.}}$$

La transformation affine donne bien $Y \sim \mathcal{N}(1, 4)$.

```
def Nuage2():
    X = rd.normal(0, 1, 100)
    Y = 1 - 2 * X
    plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')
    plt.show()
```

Pour vérifier la dépendance, on écrit $F_2(Y) = \Phi(-X) = 1 - \Phi(X)$: les variables uniformes transformées sont complémentaires, ce qui correspond bien au second exemple.

17. Identification des deux graphes.

Dans le premier exemple, la fonction $x \mapsto -\ln(1 - \Phi(x))$ est strictement croissante et ses valeurs sont positives. Le nuage se trouve sur sa courbe. Dans le second exemple, les points vérifient exactement $y = 1 - 2x$, équation d'une droite décroissante.

Graphe (a) : Nuage2. Graphe (b) : Nuage1.

Remarque sur la figure du sujet. Les points tracés dans l'énoncé sont schématiques. Pour une simulation de Nuage2 conforme à la loi demandée, ils sont exactement alignés sur $y = 1 - 2x$, sans dispersion autour de cette droite.

Partie II – Fonctions 2-croissantes et copules

Partie II – Critère différentiel et propriétés des copules

Une copule C est 2-croissante sur $[0, 1]^2$ et vérifie $C(0, v) = C(u, 0) = 0$, $C(1, v) = v$, $C(u, 1) = u$. Questions 18 à 26.

Corrigé – Partie II.

A – Fonctions 2-croissantes

18. La fonction $f_1(x, y) = \max(x, y)$.

- a) Si $s \leq t$, on a $\max(s, y_0) \leq \max(t, y_0)$: si $t \leq y_0$, les deux maxima valent y_0 ; sinon, $\max(s, y_0) \leq t$. En échangeant le rôle des coordonnées, on obtient le même résultat pour $t \mapsto \max(x_0, t)$.

$t \mapsto f_1(t, y_0)$ et $t \mapsto f_1(x_0, t)$ sont croissantes.

- b) Sur le rectangle d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 1)$,

$$\Delta_{f_1}(0, 0; 1, 1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0.$$

f_1 n'est pas 2-croissante.

19. La fonction $f_2(x, y) = xy$.

- a) Pour $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$,

$$\begin{aligned} \Delta_{f_2}(a_1, a_2; b_1, b_2) &= b_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 a_2 \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \geq 0. \end{aligned}$$

f_2 est 2-croissante.

- b) Pour $y = -1$, $f_2(t, -1) = -t$ est strictement décroissante ; par exemple $0 < 1$ mais $f_2(0, -1) = 0 > -1 = f_2(1, -1)$.

 $t \mapsto f_2(t, -1)$ n'est pas croissante.

20. Comparaison des deux propriétés.

La question 18 donne une fonction croissante séparément selon chacune des coordonnées, mais non 2-croissante. La question 19 donne une fonction 2-croissante qui n'est pas croissante séparément selon chacune des coordonnées.

La croissance séparée n'implique pas la 2-croissance.
La 2-croissance n'implique pas la croissance séparée.

21. Dérivée partielle mixte d'une fonction 2-croissante.

- a) Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $h \neq 0$. En regroupant les accroissements selon la seconde coordonnée, la définition des dérivées partielles donne

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y)}{ht} \\ = \frac{\partial_2 F(x+h, y) - \partial_2 F(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

Puis la définition de la dérivée partielle de $\partial_2 F$ selon la première coordonnée donne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 F(x+h, y) - \partial_2 F(x, y)}{h} = \partial_1(\partial_2 F)(x, y).$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz identifie cette dérivée à $\partial_{1,2}^2 F(x, y)$, quelle que soit la convention d'ordre des indices. Ainsi

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y)}{ht}.$$

On a calculé les deux limites dans l'ordre prescrit.

- b) Soit $(x, y) \in I \times J$. Comme I et J sont ouverts, on peut prendre $h > 0$ et $t > 0$ assez petits pour que les quatre sommets du rectangle soient dans $I \times J$. La 2-croissance implique

$$F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y) \geq 0.$$

En divisant par $ht > 0$, puis en faisant tendre d'abord t vers 0 par valeurs positives et ensuite h vers 0 par valeurs positives, on conserve l'inégalité. Les limites existent d'après a) et valent la dérivée partielle mixte. Donc

$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0.$

22. Expression intégrale de l'accroissement rectangulaire.

- a) Fixons un rectangle contenu dans $I \times J$. Pour $y \in [a_2, b_2]$, la fonction $x \mapsto \partial_2 F(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_1, b_1]$, de dérivée $\partial_{1,2}^2 F(x, y)$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx = \partial_2 F(b_1, y) - \partial_2 F(a_1, y).$$

La fonction $y \mapsto F(b_1, y) - F(a_1, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_2, b_2]$, de dérivée égale au membre de droite. On intègre donc cette égalité sur $[a_2, b_2]$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} (\partial_2 F(b_1, y) - \partial_2 F(a_1, y)) dy \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta_F(a_1, a_2; b_1, b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \right) dy.$$

Le calcul s'effectue dans l'ordre des intégrales indiqué. Si $a_1 = b_1$ ou $a_2 = b_2$, les deux membres sont nuls.

- b) Le sens direct est la question 21 b). Réciproquement, si la dérivée partielle mixte est positive ou nulle sur $I \times J$, chacune des deux intégrations sur les segments conserve la positivité. La formule de a) donne alors $\Delta_F(a_1, a_2; b_1, b_2) \geq 0$ pour tout rectangle considéré.

$$F \text{ est 2-croissante sur } I \times J \iff \forall (x, y) \in I \times J, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0.$$

Les démonstrations des questions 21 et 22 n'utilisent que la classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times J$; le même critère reste donc valable pour une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ seulement sur cet ouvert.

23. Croissance séparée avec les limites nulles à gauche.

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et $x_1 \leq x_2$. Pour tout $s \leq y$, la 2-croissance sur le rectangle $[x_1, x_2] \times [s, y]$ donne

$$F(x_2, y) - F(x_1, y) \geq F(x_2, s) - F(x_1, s).$$

En faisant tendre s vers $-\infty$, le membre de droite tend vers 0 par les hypothèses. Donc $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$. De même, pour $y_1 \leq y_2$ et $s \leq x$,

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) \geq F(s, y_2) - F(s, y_1) \longrightarrow 0 \quad (s \rightarrow -\infty).$$

Ainsi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t, y) \text{ et } t \mapsto F(x, t) \text{ sont croissantes.}$$

B – Copules de dimension 2

24. Lois des variables associées à une copule.

Le couple (U, V) est à valeurs dans $[0, 1]^2$. Pour $u \in [0, 1]$, l'événement $[V \leq 1]$ est certain, donc

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq 1) = C(u, 1) = u.$$

En dehors de $[0, 1]$, les valeurs sont 0 à gauche et 1 à droite. De même, pour $v \in [0, 1]$, $F_V(v) = C(1, v) = v$.

$$U \sim \mathcal{U}([0, 1]), \quad V \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

En particulier, $\mathbb{P}(U = s) = \mathbb{P}(V = s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

25. Copule de survie.

Considérons le couple $(1 - U, 1 - V)$, lui aussi à valeurs dans $[0, 1]^2$. Pour $u, v \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 - U \leq u, 1 - V \leq v) &= \mathbb{P}(U \geq 1 - u, V \geq 1 - v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U < 1 - u) - \mathbb{P}(V < 1 - v) \\ &\quad + \mathbb{P}(U < 1 - u, V < 1 - v) \\ &= 1 - (1 - u) - (1 - v) + C(1 - u, 1 - v) \\ &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v). \end{aligned}$$

On a remplacé les inégalités strictes par des inégalités larges parce que les marginales uniformes ne donnent de probabilité positive en aucun point, y compris aux extrémités 0 et 1. La question 7 assure alors la 2-croissance de C^* sur le carré. Par les conditions de bord de C ,

$$\begin{aligned} C^*(0, v) &= v - 1 + C(1, 1 - v) = 0, & C^*(u, 0) &= u - 1 + C(1 - u, 1) = 0, \\ C^*(1, v) &= v + C(0, 1 - v) = v, & C^*(u, 1) &= u + C(1 - u, 0) = u. \end{aligned}$$

Ainsi

$$C^* \text{ est une copule, associée au couple } (1 - U, 1 - V).$$

26. Accroissements et continuité d'une copule.

- a) Pour $u_1 \leq u_2$, la 2-croissance sur $[u_1, u_2] \times [0, v]$ donne, grâce aux valeurs nulles sur l'axe,

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0.$$

Sur $[u_1, u_2] \times [v, 1]$, elle donne

$$C(u_2, 1) - C(u_1, 1) - C(u_2, v) + C(u_1, v) \geq 0,$$

soit $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$. En appliquant le même raisonnement aux rectangles $[0, u] \times [v_1, v_2]$ et $[u, 1] \times [v_1, v_2]$, on obtient l'encadrement selon la seconde coordonnée.

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1, \\ 0 &\leq C(u, v_2) - C(u, v_1) \leq v_2 - v_1. \end{aligned}$$

Ces formules sont valables lorsque les deux coordonnées comparées sont dans l'ordre croissant ; elles donnent, dans tous les cas, les majorations en valeur absolue par la distance des coordonnées.

- b) Insérons le point (u_1, v_2) et utilisons l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| &\leq |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| \\ &\quad + |C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)| \\ &\leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \end{aligned}$$

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

- c) Fixons $(u_1, v_1) \in [0, 1]^2$ et $\varepsilon > 0$. Si $|u_2 - u_1| < \varepsilon/2$ et $|v_2 - v_1| < \varepsilon/2$, alors l'inégalité de b) assure $|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| < \varepsilon$. C'est la continuité de C au point (u_1, v_1) , y compris lorsque ce point est sur le bord du carré.

C est continue sur $[0, 1]^2$.

Partie III – Théorème de Sklar et applications

Partie III – Représentation copule et exemples

On construit la copule d'un couple dont les fonctions de répartition marginales sont dans les classes $\mathcal{F}_{(a,b)}$ et $\mathcal{F}_{(c,d)}$, puis on étudie les exemples logistiques et la famille de Gumbel–Barnett. Questions 27 à 36.

Corrigé – Partie III.

A – Le théorème de Sklar

27. Construction d'une copule à partir d'un couple.

Posons $U = F_X(X)$ et $V = F_Y(Y)$. Le calcul général de la question 10 a) montre que les deux variables suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- a) Pour $u, v \in]0, 1[$, les équivalences de la question 1 donnent

$$[U \leq u] = [X \leq F_X^{-1}(u)], \quad [V \leq v] = [Y \leq F_Y^{-1}(v)].$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) = C(u, v).$$

Pour les bords du carré : si $u = 0$ ou $v = 0$, la probabilité vaut 0, puisque $\mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(V = 0) = 0$. Si $v = 1$, elle vaut $\mathbb{P}(U \leq u) = u$; si $u = 1$, elle vaut $\mathbb{P}(V \leq v) = v$. Ces valeurs coïncident avec la définition de C , y compris aux quatre sommets.

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad C(u, v) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u, F_Y(Y) \leq v).$$

- b) D'après a), C est la restriction au carré d'une fonction de répartition de couple. La question 7 donne donc

C est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

- c) La définition de C donne $C(0, v) = C(u, 0) = 0$, $C(1, v) = v$ et $C(u, 1) = u$. Avec b), toutes les conditions sont réunies.

C est une copule, associée au couple (U, V) .

28. Existence et unicité de la représentation copule.

Existence. Prenons la copule C construite à la question 27. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les événements

$$[X \leq x] \quad \text{et} \quad [U \leq F_X(x)]$$

coïncident à un événement de probabilité nulle près. En effet, si $0 < F_X(x) < 1$, alors $x \in]a, b[$ et $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$: l'égalité des événements est exacte. Si $F_X(x) = 0$, les deux événements ont probabilité nulle, puisque U est uniforme. Si $F_X(x) = 1$, les deux événements ont probabilité 1. Le même raisonnement vaut pour $[Y \leq y]$ et $[V \leq F_Y(y)]$. Les intersections ont donc la même probabilité, et la question 27 a) donne

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x), V \leq F_Y(y)) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

Unicité. Soit K une autre copule vérifiant cette identité. Pour $u, v \in]0, 1[$, choisissons $x = F_X^{-1}(u)$ et $y = F_Y^{-1}(v)$. Alors

$$K(u, v) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) = C(u, v).$$

Sur le bord, les valeurs de toute copule sont imposées par sa définition, donc $K = C$ également.

$$\exists! C \text{ copule telle que, pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

C'est le théorème de Sklar dans le cadre du sujet.

29. Marginales dans la réciproque de Sklar.

On a $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$. Pour x_1 fixé, $F_2(r) \rightarrow 1$ lorsque $r \rightarrow +\infty$. La continuité de C sur $[0, 1]^2$, établie à la question 26, permet de passer à la limite :

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F(x_1, r) = C(F_1(x_1), 1) = F_1(x_1).$$

De même,

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, x_2) = C(1, F_2(x_2)) = F_2(x_2).$$

$$F_{X_1} = F_1, \quad F_{X_2} = F_2.$$

B – Distribution logistique bivariable de Gumbel

30. Loïs marginales et densités.

Par la question 4, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Z_1}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

La question 5 donne la même expression pour F_{Z_2} . Posons $G(t) = 1/(1 + e^{-t})$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$G'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

On peut donc obtenir une densité de chaque marginale en dérivant sa fonction de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{Z_1}(t) = f_{Z_2}(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

Cette fonction est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A < B$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\int_A^B \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} dt = G(B) - G(A).$$

Comme $G(A) \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow -\infty$ et $G(B) \rightarrow 1$ lorsque $B \rightarrow +\infty$, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Les trois propriétés d'une densité sont ainsi vérifiées. On a également $G \in \mathcal{F}_{(-\infty, +\infty)}$.

31. Copule logistique de Gumbel.

Pour $u \in]0, 1[$, résolvons $G(x) = u$:

$$1 + e^{-x} = \frac{1}{u}, \quad e^{-x} = \frac{1-u}{u}, \quad x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

Ainsi $G^{-1}(u) = \ln(u/(1-u))$. Sur $]0, 1[^2$, la formule de Sklar donne

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F_{(Z_1, Z_2)}(G^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= \frac{1}{1 + (1-u)/u + (1-v)/v} = \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

Sur le carré, le dénominateur est strictement positif sauf en $(0, 0)$. La même fraction donne 0 sur les axes hors de ce point, $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$. En $(0, 0)$, la valeur est 0.

$$C(u, v) = \begin{cases} \frac{uv}{u + v - uv}, & (u, v) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

Elle est bien la copule du couple par les questions 27 et 28. Pour vérifier la continuité au point où la fraction n'est pas définie, on peut aussi utiliser $u + v - uv \geq u$ et $u + v - uv \geq v$, d'où $0 \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$.

C – Copules de Gumbel–Barnett

32. Variations et positivité du polynôme g .

Posons

$$p = -\ln(u_1) > 0, \quad q = -\ln(v_1) > 0, \quad A = pq > 0, \quad B = 1 - p - q.$$

On a alors

$$g(\theta) = A\theta^2 - B\theta + 1, \quad g'(\theta) = 2A\theta - B = 2A(\theta - \theta^*), \quad \theta^* = \frac{B}{2A}.$$

Cette dernière expression est celle de l'énoncé.

a) Le signe de g' est celui de $\theta - \theta^*$. On a toujours $g(0) = 1$ et $g(1) = pq + p + q$.

Si $\theta^* \leq 0$, g est strictement croissante sur $[0, 1]$:

θ	0	1
g'	+	sur $]0, 1]$
g	1	$\nearrow$ $pq + p + q$

Pour $\theta^* = 0$, la dérivée est nulle seulement en 0.

Si $0 < \theta^* < 1$, g décroît strictement jusqu'à θ^* , puis croît strictement :

θ	0	θ^*	1
g'	-	0	+
g	1	$\searrow$ $1 - \frac{B^2}{4A}$	$\nearrow$ $pq + p + q$

La valeur centrale s'obtient en substituant $\theta^* = B/(2A)$ dans $A\theta^2 - B\theta + 1$.

Si $\theta^* \geq 1$, g est strictement décroissante sur $[0, 1]$:

θ	0	1
g'	–	sur $[0, 1[$
g	1	$\searrow$ $pq + p + q$

Pour $\theta^* = 1$, la dérivée est nulle seulement en 1. En résumé, la position du minimum sur $[0, 1]$ est

$$\begin{cases} 0, & \theta^* \leq 0, \\ \theta^*, & 0 < \theta^* < 1, \\ 1, & \theta^* \geq 1. \end{cases}$$

b) Une écriture qui couvre tous les cas est

$$g(\theta) = (1 - \theta) + \theta(p + q) + \theta^2 pq.$$

Pour $0 \leq \theta \leq 1$, les trois termes sont positifs ou nuls. Si $\theta = 0$, le premier vaut 1 ; si $\theta > 0$, le deuxième est strictement positif puisque $p + q > 0$.

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad g(\theta) > 0.$$

33. Régularité et 2-croissance à l'intérieur du carré.

Fixons $\theta \in [0, 1]$. Pour $u, v > 0$, posons $E(u, v) = e^{-\theta \ln u \ln v}$. En dérivant par rapport à une seule variable à la fois, les règles usuelles des fonctions d'une variable donnent

$$\partial_1 C_\theta(u, v) = vE(u, v)(1 - \theta \ln v), \quad \partial_2 C_\theta(u, v) = uE(u, v)(1 - \theta \ln u).$$

Détaillons la dérivée mixte. Pour u fixé,

$$\frac{d}{dv}(v(1 - \theta \ln v)) = 1 - \theta \ln v - \theta, \quad \frac{d}{dv}E(u, v) = -\frac{\theta \ln u}{v}E(u, v).$$

La règle du produit donne donc

$$\begin{aligned} \partial_2(\partial_1 C_\theta)(u, v) &= E(u, v)(1 - \theta \ln v - \theta - \theta \ln u(1 - \theta \ln v)) \\ &= E(u, v)(1 - \theta(1 + \ln u + \ln v) + \theta^2 \ln u \ln v). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles pures d'ordre deux valent

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 C_\theta(u, v) &= -\frac{\theta v \ln v}{u} E(u, v)(1 - \theta \ln v), \\ \partial_{2,2}^2 C_\theta(u, v) &= -\frac{\theta u \ln u}{v} E(u, v)(1 - \theta \ln u). \end{aligned}$$

La dérivée mixte obtenue dans l'autre ordre a la même expression, par le même calcul. Toutes ces fonctions sont continues pour $u, v > 0$, ce qui établit la classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$. Avec les notations de la question 32 appliquées à u, v ,

$$\partial_{1,2}^2 C_\theta(u, v) = e^{-\theta \ln u \ln v} [\theta^2 \ln u \ln v - \theta(1 + \ln u + \ln v) + 1] > 0.$$

Le facteur exponentiel est strictement positif et le crochet est $g(\theta) > 0$, par 32 b). Le critère local démontré en 22 b) donne alors

$$C_\theta \in \mathcal{C}^2(]0, 1[^2) \quad \text{et} \quad C_\theta \text{ est 2-croissante sur }]0, 1[^2.$$

34. 2-croissance sur le carré fermé.

Montrons d'abord que C_θ est continue sur $[0, 1]^2$. Pour $0 < u, v \leq 1$, on a $\ln u \leq 0$, $\ln v \leq 0$, donc $\ln u \ln v \geq 0$ et

$$0 \leq C_\theta(u, v) \leq uv.$$

Cette majoration vaut aussi sur les axes, où C_θ est nulle. Si (u, v) tend vers un point de l'un des axes dans le carré, $uv \rightarrow 0$; le théorème d'encadrement assure $C_\theta(u, v) \rightarrow 0$. Aux points dont les deux coordonnées sont strictement positives, l'expression à l'aide des logarithmes est continue, y compris lorsqu'une coordonnée vaut 1. Ainsi C_θ est continue sur tout le carré.

Soient maintenant $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$ dans $[0, 1]$. Pour $\varepsilon \in]0, 1/2[$, posons

$$a_i^\varepsilon = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)a_i, \quad b_i^\varepsilon = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)b_i \quad (i = 1, 2).$$

Ces nombres sont dans $]0, 1[$ et vérifient $a_i^\varepsilon \leq b_i^\varepsilon$. La question 33 donne

$$\Delta_{C_\theta}(a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon; b_1^\varepsilon, b_2^\varepsilon) \geq 0.$$

En faisant tendre ε vers 0 par valeurs positives, la continuité aux quatre sommets donne $\Delta_{C_\theta}(a_1, a_2; b_1, b_2) \geq 0$.

$C_\theta \text{ est 2-croissante sur } [0, 1]^2.$

35. Vérification des conditions de copule.

Par définition, $C_\theta(0, v) = C_\theta(u, 0) = 0$. Si $v > 0$, comme $\ln 1 = 0$,

$$C_\theta(1, v) = ve^{-\theta \ln 1 \ln v} = v.$$

La même égalité est vraie pour $v = 0$. De même, $C_\theta(u, 1) = u$ pour tout $u \in [0, 1]$. La question 34 assure la 2-croissance sur le carré fermé.

$\forall \theta \in [0, 1], \quad C_\theta \text{ est une copule.}$

36. Loïs marginales dans le dernier exemple.

Posons

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, \end{cases} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

Ce sont les fonctions de répartition des lois exponentielles de paramètres respectifs 1 et 2. Pour $x, y > 0$, l'expression de l'énoncé s'écrit exactement $C_1(F_1(x), F_2(y))$. Si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$, au moins une des deux marginales vaut 0 et C_1 est nulle sur les axes ; l'égalité reste donc valable :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = C_1(F_1(x), F_2(y)).$$

La question 35 assure que C_1 est une copule ; la question 29 identifie alors les marginales :

$X \sim \mathcal{E}(1), \quad Y \sim \mathcal{E}(2).$

En particulier, les densités peuvent être choisies sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Le paramètre de $\mathcal{E}(2)$ est 2 : son espérance vaut $1/2$.