

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2026

Table des matières

1	Notations, rappels et préliminaires	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; convergences de variables.</i>	2
2	I – Fonction de répartition d'un couple : propriétés et exemples	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; couples de variables discrètes ; convergences de variables ; Python.</i>	2
3	II – Fonctions 2-croissantes et copules 2-dimensionnelles	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; intégrales ; variables à densité. . . .</i>	4
4	III – Démonstration du théorème de Sklar et applications	6
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables ; variables à densité ; intégrales généralisées ; Python.</i>	6
5	Formulaire Python	7
	<i>Thèmes abordés : Python.</i>	7

1 Notations, rappels et préliminaires

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; convergences de variables.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace. Si Z est une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance. Si Z est une variable aléatoire réelle, on note F_Z sa fonction de répartition.

Si (X, Y) est un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$, on note $F_{(X,Y)}$ la fonction de répartition de ce couple, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]).$$

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et F une fonction définie sur un ensemble contenant D , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que F est 2-croissante sur D si, pour tout couple $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in D^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$,

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0,$$

$$\text{ou encore} \quad F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) \leq F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Si F est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$, on dit simplement que F est 2-croissante.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On dit que $X = Y$ presque sûrement, et on note $X = Y$ ps, si $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Étant donné un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), on note $\mathcal{F}_{(a,b)}$ l'ensemble des fonctions continues et croissantes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, strictement croissantes sur $]a, b[$, de limite nulle en a et de limite égale à 1 en b .

On considère un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. Soit $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$. Montrer que la restriction de g à $]a, b[$ réalise une bijection de $]a, b[$ dans $]0, 1[$. Par commodité, dans tout le problème, pour toute fonction $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$, on note g^{-1} la réciproque de la restriction de g à $]a, b[$.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité de probabilité, où f est une fonction continue et strictement positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors de $]a, b[$. Montrer que $F_X \in \mathcal{F}_{(a,b)}$.

2 I – Fonction de répartition d'un couple : propriétés et exemples

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; couples de variables discrètes ; convergences de variables ; Python.

Soient (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(x, t) = 0.$$

4. a) Montrer que

$$F_X(x) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X \leq x] \cap [Y \leq n] \right).$$

- b) En déduire que $F_X(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, r)$.

5. Montrer que $F_Y(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, y)$.

6. En déduire que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = 1.$$

7. Montrer que $F_{(X,Y)}$ est 2-croissante.

8. a) Montrer que $F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y))$.

b) Montrer que $F_{(X,Y)}(x, y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$.

On vient de démontrer le théorème des bornes de Fréchet-Hoeffding :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y)).$$

On traite dans les questions 9, 10, 11 et 12 un premier exemple. Soient $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a_1 < b_1 \leq +\infty$ et $-\infty \leq a_2 < b_2 \leq +\infty$. Soit $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{(a_1, b_1)} \times \mathcal{F}_{(a_2, b_2)}$. On suppose dans cet exemple seulement que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y)).$$

9. Montrer que $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.

10. Notons $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$.

a) Déterminer les lois de U et V .

b) Déterminer la fonction de répartition de (U, V) .

c) Représenter sur le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq F_{(U,V)}(x, y) \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Montrer que

$$\mathbb{P} \left(U - V > \frac{1}{n} \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} \left(\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n} \cap V \leq \frac{k}{n} \right).$$

e) En déduire que $\mathbb{P}(U \leq V) = 1$ puis $\mathbb{P}(U = V) = 1$.

f) On suppose que $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer que

$$X = F_1^{-1}(F_2(Y)) \quad \text{ps.}$$

11. On suppose que $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h croissantes telles que $X = g(Y)$ ps et $Y = h(X)$ ps. On dit que les variables X et Y sont comonotones.

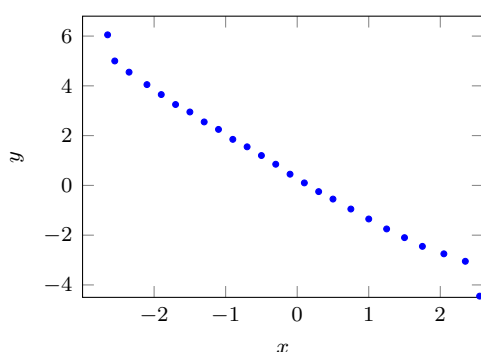
12. **Python.** On suppose que F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et F_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Écrire une fonction Python, **Nuage1**, qui représente dans $\mathbb{R}^2$ 100 réalisations de (X, Y) .

On traite dans les questions 13, 14, 15, 16 et 17 un second exemple. Soient $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a_1 < b_1 \leq +\infty$ et $-\infty \leq a_2 < b_2 \leq +\infty$. Soit $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{(a_1, b_1)} \times \mathcal{F}_{(a_2, b_2)}$. On suppose dans cet exemple seulement que

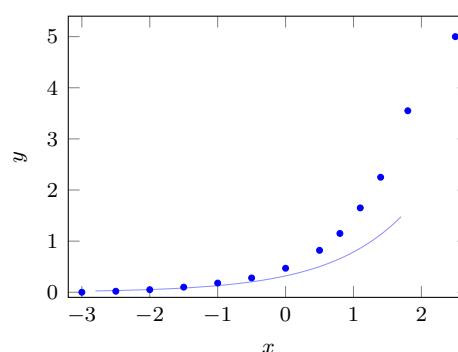
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0).$$

13. Montrer que $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.
14. Notons $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$.
- Déterminer les lois des variables aléatoires U et $1 - V$ ainsi que la fonction de répartition du couple $(U, 1 - V)$.
 - En déduire $\mathbb{P}(U = 1 - V) = 1$.
 - On suppose que $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer que

$$X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y)) \quad \text{ps.}$$
15. On suppose que $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h décroissantes telles que $X = g(Y)$ ps et $Y = h(X)$ ps. On dit que les variables X et Y sont contra-monotones.
16. **Python.** On suppose que F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et F_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 1 et de variance 4. Écrire une fonction Python, **Nuage2**, qui trace dans $\mathbb{R}^2$ 100 réalisations de (X, Y) .
17. Les deux graphes obtenus sont représentés dans la figure ci-dessous. Expliquer quel graphe correspond à quel exemple.



(a) Nuage1 ou Nuage2 ?



(b) Nuage1 ou Nuage2 ?

3 II – Fonctions 2-croissantes et copules 2-dimensionnelles

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; intégrales ; variables à densité.

Partie A : Fonctions 2-croissantes

18. Soit $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \max(x, y)$, et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
- Montrer que $t \mapsto f_1(t, y_0)$ et $t \mapsto f_1(x_0, t)$ sont croissantes.
 - Montrer que f_1 n'est pas 2-croissante.
19. Soit $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$.
- Montrer que f_2 est 2-croissante.
 - Montrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f_2(t, y)$ ne soit pas croissante.
20. Que déduire des deux questions précédentes ?

21. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, 2-croissante sur $I \times J$.

a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y)}{ht}.$$

b) En déduire que $\forall (x, y) \in I \times J, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0$.

22. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (I \times J)^2$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. Montrer que

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) \, dx \, dy.$$

b) En déduire que F est 2-croissante sur $I \times J$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0.$$

23. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, 2-croissante telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t, y) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(x, t) = 0.$$

Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $t \mapsto F(t, y)$ et $t \mapsto F(x, t)$ sont croissantes.

Partie B : Copule 2-dimensionnelle

Une copule C est une fonction à valeurs réelles, définie sur $[0, 1]^2$, 2-croissante sur $[0, 1]^2$, telle que

$$\forall x \in [0, 1], \quad C(0, x) = C(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad C(1, x) = C(x, 1) = x.$$

On admet le théorème suivant : si C est une copule, alors il existe un couple aléatoire (U, V) , à valeurs dans $[0, 1]^2$, tel que C soit la fonction de répartition restreinte à $[0, 1]^2$ de ce couple. On dit que le couple (U, V) est associé à la copule C . Soit C une copule et (U, V) un couple aléatoire associé à C .

24. Déterminer les lois de U et V .

25. On définit

$$C^* : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Montrer que C^* est une copule. C'est la copule de survie associée à C .

26. Soit C une copule.

a) Montrer que

$$\begin{aligned} \forall v \in [0, 1], \forall u_1, u_2 \in [0, 1], \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow 0 \leq C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1, \\ \forall u \in [0, 1], \forall v_1, v_2 \in [0, 1], \quad v_1 \leq v_2 \Rightarrow 0 \leq C(u, v_2) - C(u, v_1) \leq v_2 - v_1. \end{aligned}$$

b) En déduire que

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2, \quad |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

c) Montrer que C est continue sur $[0, 1]^2$.

4 III – Démonstration du théorème de Sklar et applications

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables ; variables à densité ; intégrales généralisées ; Python.

Partie A : Le théorème

Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $-\infty \leq c < d \leq +\infty$. Soit (X, Y) un couple aléatoire tel que $(F_X, F_Y) \in \mathcal{F}_{(a,b)} \times \mathcal{F}_{(c,d)}$.

27. Posons $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$C(x, y) = \begin{cases} F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)), & (x, y) \in]0, 1[^2, \\ x, & y = 1, \\ y, & x = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tous $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$C(x, y) = \mathbb{P}([F_X(X) \leq x] \cap [F_Y(Y) \leq y]).$$

Montrer que cette formule reste valide pour tous $(x, y) \in [0, 1]^2$.

b) En déduire que C est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

c) En déduire que C est une copule.

28. Montrer qu'il existe une unique copule C telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

On dit que C est la représentation copule de $F_{(X,Y)}$. Ce dernier résultat est le théorème de Sklar.

On admettra la réciproque : soient C une copule et F_1, F_2 deux fonctions de répartition de variables aléatoires réelles à densité. La fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$$

est la fonction de répartition d'un couple aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

29. Soit C une copule, F_1 et F_2 deux fonctions de répartition de variables aléatoires réelles à densité, et F la fonction de répartition du couple (X_1, X_2) définie par

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Montrer que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$.

Partie B : Un premier exemple, la distribution logistique bivariée de Gumbel

Soit (Z_1, Z_2) un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(Z_1, Z_2)}(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}.$$

30. Montrer que Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires réelles à densité et déterminer une densité pour chaque variable.

31. Déterminer la représentation copule de F . Cette copule est appelée copule logistique de Gumbel.

Partie C : Un deuxième exemple, la famille des copules de Gumbel-Barnett

Soit $\theta \in [0, 1]$. On définit $C_\theta : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} uv e^{-\theta \ln(u) \ln(v)}, & (u, v) \in]0, 1[^2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(u_1, v_1) \in]0, 1[^2$. On pose

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\theta) = \theta^2 \ln(u_1) \ln(v_1) - \theta(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1)) + 1.$$

32. a) Dresser les tableaux de variation de g selon les valeurs de

$$\theta^* = \frac{1 + \ln(u_1) + \ln(v_1)}{2 \ln(u_1) \ln(v_1)}.$$

b) Montrer que g est toujours positive.

33. Montrer que C_θ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$ et est 2-croissante sur $]0, 1[^2$.

34. Montrer que C_θ est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

35. Montrer que C_θ est une copule.

36. Soit (X, Y) un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de fonction de répartition

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y})e^{-\ln(1-e^{-x})\ln(1-e^{-2y})}, & (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et de Y .

5 Formulaire Python

Thèmes abordés : Python.

I. Simulations probabilistes

On suppose avoir importé les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
```

Instruction	Effet
<code>rd.random([q, r])</code>	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
<code>rd.random(n)</code>	Simule une réalisation d'un vecteur ligne aléatoire de taille n dont les coefficients sont indépendants et suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.
<code>rd.exponential(a, [q, r])</code>	Simule une matrice de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre a .
<code>rd.exponential(a, n)</code>	Simule un vecteur de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre a .
<code>rd.normal(m, d, [q, r])</code>	Simule une matrice de variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, d^2)$.
<code>rd.normal(m, d, n)</code>	Simule un vecteur de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, d^2)$.
<code>rd.uniform(a, b, [q, r])</code>	Simule une matrice de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.
<code>rd.uniform(a, b, n)</code>	Simule un vecteur de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Si le paramètre $[q, r]$ est omis, les fonctions renvoient un seul coefficient suivant les mêmes contraintes. Pour obtenir la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, on utilise la bibliothèque `scipy` :

<code>sp.ndtr(x)</code>	Renvoie $\Phi(x)$.
<code>sp.ndtri(p)</code>	Renvoie $\Phi^{-1}(p)$.

II. Graphiques

<code>plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')</code>	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y ; <code>linestyle</code> permet de relier ou non les points et <code>marker</code> est la marque des points.
<code>plt.show()</code>	Affiche le graphique.

FIN